FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

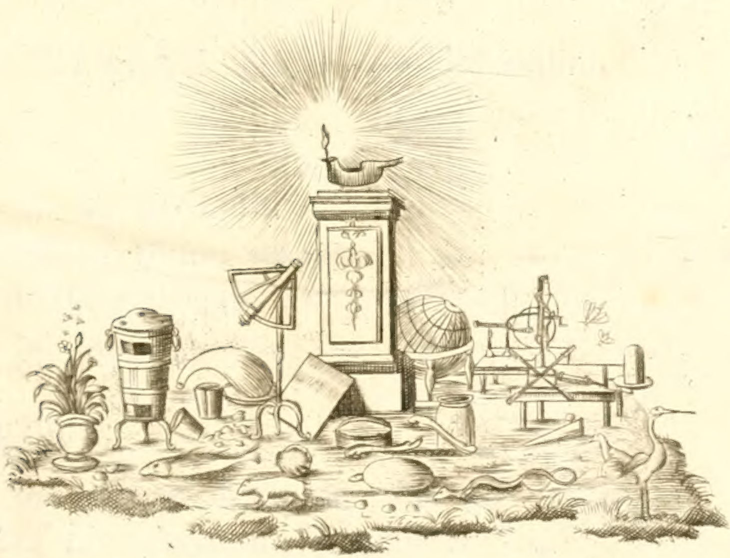
Bound
A.M.N.
1916

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXXII.

PARS POSTERIOR.

5.06(474).S



4/22/1916/ collated

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXVI.

r16. 70297 april 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

MDCCLXXXII. Juillet — Décembre.

Pag.

Reception de M. Hackmann - - - - 3.

Nouvelle claſſe d'Aſſociés étrangers - - - 6.

Reception de M. Lhuilier - - - - - 7.

Retour de M. Zouyef - - - - - - 8.

BOTANIQUE.

Annonce d'un ouvrage botanique ſur les arbres, arbuſtes & plantes de l'Empire de Ruſſie - 9.

MÉTÉOROLOGIE. Pag.

Eté de 1782 - - - - - - - 14.

Hyver de 1782 à 1783 - - - - - - 20.

Comparaiſon des inſtrumens météorologiques envoyés par l'Académie Electorale de Manheim, avec ceux de l'Académie Impériale des Sciences - - - - - - - - 25.

OUVRAGES *imprimés & manuſcrits, curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentés ou communiqués à l'Académie pendant le dernier ſemeſtre de l'année 1782* - - 28.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXII. Pars poſterior.

Cum tabulis VII. aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *De traiectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis.* *Tab. I. fig.* 1 — 7 - - - - - 3.

—— —— *De miris proprietatibus curvae elaſticae ſub aequatione* $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ *contentae* *Tab. II. fig.* 1 – 5 - - - - - 34.

LEONH.

Pag.

LEONH. EVLER. *Speculationes ſuper formula integrali* $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$. *Vbi ſimul egregiae obſervationes circa fractiones continuas occurrunt* - - - - - - 62.

AND. JOH. LEXELL. *Demonſtratio nonnullorum Theorematum ex doctrina ſphaerica.* Tab. III. fig. 1 — 5 - - - - - 85.

NICOL. FVSS. *Serierum quarundam ſingularium ſummatio* - - - - - - - 96.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De motu globi circa axem obliquum quemcunque gyrantis & ſuper plano horizontali incedentis.* Tab. IV. fig. 1 – 5 - - - - 107.

—— —— —— *Accuratior euolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inuentarum.* Tab. IV. fig. 6. - - - 148.

NICOL. FVSS. *De ſuperficiei terreſtris projectione ſtereographica.* Tab. V. et VI. - - 170.

PHYSICA

JEAN JAQUES FERBER. *Reflexions ſur l'ancienneté rélative des roches & des couches terreuſes*

reuſes qui compoſent la croute du Globe terreſtre. Premiere Section - - - 185.

CASP. FRIEDR. WOLFF. *De ordine fibrarum cordis. Diſſertatio IV. De fibris externis ventriculi ſiniſtri* - - - 214.

Cum tribus tabulis ſeparatis aeri inciſis, quae tribus voluminibus Actorum praecedentibus inſertae inueniuntur. - - - -

PET. JON. BERGIVS. *Caenopteris, nouum e filicibus genus. Tab. VII. fig.* 1. 2. 3. - 248.

JOS. THEOPH. KOELREVTER. *Malvacei ordinis plantae nouae hybridae* - - - 251.

ASTRONOMICA

ANDR. JOH. LEXELL. *De occultationibus quibusdam ſingularibus, ſiue ſtellarum fixarum a planetis, ſeu etiam planetarum a ſe inuicem* 291.

PETR. INOCHODZOW. *Obſeruationes aſtronomicae pro determinanda poſitione vrbis Jaroslawl inſtitutae* - - - - 321.

—— —— —— *Obſeruationes aſtronomicae Koſtromae habitae* - - - - - 326.

STEPH. RVMOVSKI. *Obſeruationes aſtronomicae in Cherſoneſo Taurica anno* 1785 *inſtitutae a* Theodoro Tchernoi - - - 329.

JACQ.

JACQ. ANDRE' MALLET. *Obſervations aſtronomiques ſaites à Avully près de Genève.* - 342.

WOLFG. LVDW. KRAFFT. *Specimen tabulae uſui nautico accommodatae, pro inuenienda vera Lunae a ſtella vel Sole diſtantia, ex obſeruata vtriusque altitudine & diſtantia apparente* - - - - - 351.

EPITOME *obſervationum meteorologicarum Petropoli Anno MDCCLXXXII. ſecundum Calendarium Gregorianum inſtitutarum.* - - - - 306.

Errata.

Errata.

Pag. 249 et 250 ad marginem loco Tab. V. VI. et VII. lege Tab. VII. Fig. 1. 2 et 3.

Pag. 308. lin. 11. lege conſideratione.

Pag. 312. lin. 22. lege procedimus.

HISTO-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXII.
Juillet —— Décembre.

L'Académie n'a point tenu d'Aſſemblée publique, la diſtribution du Prix annuel qui devoit avoir lieu vers la fin de cette année, ayant été remiſe au commencement de la prochaine.

Le 22 Août, dans une ſéance ordinaite, a été reçu au nombre des Adjoints, M. *Jean Fréderic Hackmann*, Conrecteur du Gymnaſe Académique. Le Secrétaire l'ayant introduit à la ſéance ſuivante, le nouveau Adjoint y a prononcé le discours de reception ſuivant.

Viri Illuſtres, Celeberrimi et Clariſſimi!

„Multae ſunt in ſocietate civili conditiones, in quibus vel mediocris ingenii homo maximo cum ſuo et civium ſuorum fructu reipublicae commodis proſpicere poteſt. —— Ad pleraque negotia et munera vitae obeunda vulgares animi dotes ſufficiunt, multaque quae aliis praeſtamus officia a benevola tantum animi affectione proficiſcuntur.

Cautione maxima providendum eſt, vt tale vitae genus ſectemur, cui ingenium et mores noſtri optime conveniunt, et in quo de ſocietate, cui interſumus, bene merendi recteque factis benevolentiam civium nobis conciliandi opportunitas datur. Quicunque igitur, vana ſui opinione ductus, praecipiti iudicio agit, remque, cui impar eſt, ſuſcipit, iure reprehendendus erit. —— Inprimis hoc cavendum eſt homini, qui nulla munera civilia in republica ſuſcipiens, ſtudio litterarum otium conſecrando exquiſitiorem doctrinam ſibi comparare conatur.

Arduum videtur in ſtudiis litterarum excellere, cum tot ſaecula, quae a primo ſcientiarum ortu elapſa ſunt, multa quidem et inluſtria ingenii humani monumenta exhibeant, ſed pauca tantum, ſi reputes, quanta interea vis mortalium, nullis factis aut cogitatis ad poſteros nota, vitam obſcuro ſilentio poſuerit. —— Inter ipſos etiam viros illos, qui varios apud populos et diuerſis temporibus litteras coluerunt, rariora inſignis alicuius doctrinae exempla inuenies.

Mul-

Multi veterum, qui nomen celebre ad poſteritatem reliquerunt, negotiis civilibus fungebantur, et in otio tantum litterarum ſtudia tractabant. —— Fieri hoc poterat ſaeculis illis, cum arctiores limites. quibus omnes diſciplinae circumſcriptae erant, non continuum in litteris laborem requirerent, cumque ipſa negotiorum publicorum ratio nondum tantis difficultatibus impedita erat. —— Cum autem omnes fere diſciplinae in immenſum creverint, difficile eſt, vitae publicae negotia obeundo in litteris ſimul inſigni aliquo modo proficere. —— Noſtra tamen aetas nonnulla etiam et inluſtria huius rei exempla tulit, ſed haec a viris profecta ſunt, qui raro ingenio praediti, vel fortunae donis prae caeteris ornati fuerunt. —— Cum autem hoc paucis tantum, quos dii amant, datum ſit, ad vulgares calculos vocari nequit.

Proviſum igitur eſt, vt, qui exquiſitioris doctrinae cupidi eſſent, in ſocietates litterarias coirent, litteriſque vacando decus et famam comparare poſſent. Diſciplinae illae, quibus ad vitae civilis negotia inſtituimur, praeclaram nobis in civitate noſtra et apud populares noſtros laudem comparare poſſunt. —— Latius autem patet id celebritatis genus, quod ab iis maxime litteris et artibus proficiſci poteſt, quae omnium populorum commodis inſeruiunt, ipſamque rerum hominumque naturam explorando, nobiliſſimam in qua ſe exerceat ingenium materiam praebent.

Haec dicenda duxi Viri Illuſtres, ne me ignarum exiſtimetis, quantum conatus ſim, cum meum nomen Illuſtri Veſtrae Societati aſcribi cuperem, vtque Vobis gratum meum animum teſter, qui hominem mediocri tantum

ingenio et doctrina ornatum ſumma benevolentia in coetum veſtrum recipiendo, ſtimulos mihi addidiſtis, quo doctrinae et virtutis Veſtrae aemulus fierem.

Honorificum eſt coetu et conſuetudine clariſſimorum virorum vti, hocque ſemper mea laus, meum decus erit, omnique re qua honos Veſter augetur, meum etiam auctum putabo. —— Multo propenſiores opiniones hominum experitur, qui collegio magnorum virorum adſcriptus eſt, magnumque habet praeiudicium doctrinae et virtutis, ſummorum enim virorum conſiliis aliquantum proficere et ſapere poſſe videtur.

Vitae humanae incerti caſus me admonent, ne multa de me promittam, hoc autem perſuaſum habeo, mea ſtudia nunquam Illuſtribus Veſtris nominibus dedecori fore. Vnumque addo et ſummo opere a Vobis peto, vt monitis et conſiliis me, pro humanitate quae in Vobis eſt, ſublevetis, Veſtro enim exemplo et ſodalitio, quidquid in litteris proficere poſſim, magna ex parte debitum feram. "

Pour ne pas groſſir la liſte des Académiciens externes, & diminuer par là l'honneur attaché à ce titre, pour obliger toutefois des ſavans qui ſouhaiteroient d'être liés plus intimement avec l'Académie, il a été jugé à propos de créer avec le conſentement du Directeur, une claſſe d'Aſſociés étrangers ſecondaire, ſous le titre de *Correſpondans externes* & de leurs expédier en foi de leur agrégation à cette Claſſe, un Diplome imprimé ſur du parchemin, ſellé du grand ſeau académique & conçû en ces termes.

Au-

Auſpiciis Auguſtiſſimis Potentiſſimae Imperatricis ac Dominae Dominae CATHARINAE SECVNDAE totius Ruſſiae Autocratoris, Academiae Scientiarum Petropolitanae Protectricis munificentiſſimae.

Academia Scientiarum Petropolitana Virum Clariſſimum N. N. ob aſſiduam Eius in litteris colendis induſtriam commercio litterario ſecum iungere decernens, huius rei vt publicum exiſtat teſtimonium, Diplomate hoc Correſpondentem ſuum rite et ſolemniter declarat; penitus perſuaſa, Virum Clariſſimum pro inſigni ſuo in litterarum disciplinas amore, obque nouum hunc, quo ornatus eſt, honoris titulum, Academiam Petropolitanam per litteras de omnibus certiorem facturum, quae ad augmentum ſcientiarum facere poſſe videntur. Datum in Conuentu Academico d.

Acad. Imp. Scientiarum Director
N. N.

(L. S.)

Conuentus Academici Scretarius
N. N.

Ce fut conformement à cette reſolution, que l'Académie reçut encore dans la même ſéance du 22 Août

M. *Simon Lhuilier*, Citoyen de Génève & membre de la Société d'Education en Pologne, à Varſovie

au nombre des Correſpondans Externes.

Le

Le 7 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyeſ* de retour de ſon voyage en Crimée, eſt venu reprendre ſéance à l'Académie, où il a lu un rapport des ſes voyages en langue ruſſe, dans lequel il indique la route & les endroits mémorables par leſquels il a paſſé ; ainſi que les envois des collections d'Hiſtoire naturelle & d'antiquités qu'il avoit expédiées pour l'Académie, & qui tous ont été reçu & dépoſé au Muſeum Académique.

ANNONCE
d'un
OUVRAGE BOTANIQUE
ſur les Arbres, Arbuſtes & Plantes de l'Empire de Ruſſie, qui ſera publié par ordre & ſous les auſpices de *SA MAJESTE IMPERIALE.*

Communiqué & diſtribué à l'Académie le 12 Août.
Par M. le Conſeiller de Collèges *Pallas.*

Tandis que *l'Auguſte Législatrice* du Nord s'occupe du bonheur de *Ses* ſujets, par l'introduction de nouvelles loix, d'une adminiſtration de juſtice & de finance plus analogue à *Ses* grandes vuës, par la reforme de l'éducation nationale, par l'encouragement des ſciences, des arts & du commerce, par *Ses* ſoins enfin de former l'eſprit des Princes qui doivent un jour devenir les émules de ſa grandeur; — *cette Souveraine* ſage & éclairée ne dedaigne pas les détails qui peuvent tendre à la perfection de *Son* ouvrage.

Sa Majeſté Impériale s'occupant entre autres d'un nouveau Réglement pour la conſervation des forêts de *Son* Empire, & deſirant en même tems de perfectionner l'économie rurale & de ſoulager l'humanité par une connois-

ſance préciſe des plantes utiles que le ſol de *Son* vaſte Empire produit; *Elle* a conçu l'idée d'un ouvrage botanique qui put remplir ce but: idée digne de l'Eſprit créateur de *l'Auguſte Protectrice* des Sciences, dont la munificence pour l'avancement des connoiſſances humaines a brillé depuis *Son* avénement au trône, par le renouvellement de l'Académie des Sciences & l'inſtitution de celle des Arts; par ces voyages diſpendieux d'obſervateurs tant Aſtronomes, que Naturaliſtes, dont le nombre & l'importance a ſurpaſſé tout ce que les autres nations ont fait dans ce ſiecle; par les encouragemens accordés ſans nombre aux ſavans étrangers & régnicoles; par l'emploi de ſommes annuelles conſidérables pour la traduction des meilleurs ouvrages de tout genre en langue nationale; enfin par l'illuſtre exemple qu'*Elle* a donné *Elle* même dans la carriere des lettres.

Sa Majeſté Impériale voulant que l'ouvrage projetté ſoit entierement executé à *Ses* dépens, dans l'intention ſeule de contribuer au bien-être & à l'inſtruction des hommes; on n'a ni ſouſcription, ni autre engagement à propoſer au public; mais puisque tous ceux, que ce grand ouvrage interéſſera, doivent, en y applaudiſſant, deſirer d'avance quelque notion de ce qu'on doit en attendre, j'ai crû qu'il etoit de mon devoir de ſatisfaire la curioſité du public par l'esquiſſe ſuccincte que j'en vais donner. Voici en peu de mots le plan, tel qu'il à été approuvé par *Sa Majeſté Impériale.*

L'ouvrage pour lequel *Sa Majeſté Impériale* a fait aſſigner les fonds néceſſaires, ſera executé avec tout le luxe

luxe typographique qui convient à la magnificence d'une telle entrepriſe. Les planches qui doivent repréſenter les plantes de grandeur naturelle, ſeront du grand format des beaux ouvrages botaniques de Mr. *Jacquin*, legérement gravées & colorées avec tout le ſoin poſſible ſur des originaux faits d'après nature. — Le texte qui contiendra les déſcriptions & détails néceſſaires ſur la nature & l'uſage de toutes les plantes indigênes, paroitra en ruſſe & en latin, de la même grandeur & ſur le même papier de Hollande que les planches.

L'objet principal de l'ouvrage que *Sa Majéſte Impériale* veut généreuſement donner à *Son* peuple & à la République des lettres étant l'utilité publique, les plantes immediatement utiles à l'humanité tiendront donc le premier rang dans l'execution. Pour ne pas rendre l'ouvrage inutilement volumineux, on retranchera d'abord de la ſuite des planches, les arbres & les plantes les plus généralement connues par des noms vulgaires, ſurtout lorsqu'il ne ſauroit réſulter de cette omiſſion aucune mépriſe dangereuſe pour l'humanité. Le texte n'en donnera pas moins les détails utiles à connoitre ſur la nature & l'uſage de ces eſpèces vulgaires. Le même ſera obſervé pour les eſpèces auſſi communes en Europe qu'en Ruſſie, dont on trouve les figures dans les ouvrages botaniques les plus connus & qui n'annoncent d'ailleurs aucune vertu particuliere.

On s'attachera au contraire à donner des gravures auſſi parfaites que poſſible de toutes les eſpèces affectées à l'Empire, ou dont l'utilité n'eſt que peu connue dans le pays qui les produit, & qui ſouvent par cette raiſon même

b 2 n'ont

n'ont pas de noms uſités. Les eſpèces purement curieuſes & rares ſeront un objet ſecondaire, qu'on aura ſoin de remplir à la ſatisfaction des Botaniſtes.

D'après ce plan j'eſtime que cinq à ſix cent planches gravees épuiſeront à peu près, dans le total des végetaux indigènes de l'Empire Ruſſe, toutes les eſpèces utiles & rares dont on pourra déſirer les figures. De toutes celles qui peuvent remplir une planche de la grandeur ci-deſſus énoncée, on ne fera repréſenter qu'une ſeule eſpèce par planche, ayant ſoin d'en donner non-ſeulement les fleurs, mais auſſi le fruit, & les variétés accidentelles qu'on aura obſervées. Mais pour les plantes naines & petites, qui ſont d'un même genre, par exemple, les ſaxifrages, les mouſſes, &c. on ſe permettra de placer pluſieurs eſpèces ſur la même planche, pour mieux la remplir.

Dans un ouvrage de la nature de celui-ci, il n'eſt pas poſſible d'obſerver aucun ordre méthodique. Mais on tâchera du moins de placer enſemble les eſpèces d'un même genre, & les premiers cahiers contiendront ſurtout les arbres & arbuſtes remarquables. Chaque cahier ſera de cinquante planches, dont deux pourront avec le texte former un volume. On ne peut encore fixer le terme quand le premier cahier pourra être achevé; mais on tâchera d'en fournir du moins un par an & de preſſer l'ouvrage autant que le nombre d'artiſtes exercés pourra y ſuffire.

Le

Le choix que *Sa Majeſté Impériale* a daigné faire de moi, pour exécuter ſous *Ses* auſpices un ouvrage de cette importance & d'une utilité ſi générale, m'honore infiniment; auſſi employerai-je tous mes efforts pour m'en rendre digne; & ſi l'exécution pouvoit égaler mon zéle, j'oſerois éſperer d'en faire un monument digne de la protection & du ſiecle de *CATHERINE SECONDE.* St. Pétersbourg ce 28 Juillet v. St. 1782.

METÉOROLOGIE.

Été de 1782.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la derniere fois le 7 Mai, & il récommença à neiger le 4 Septembre. L'intervalle entre cette derniere & premiere neige eſt de 120 jours.

2.

Il géla pour la derniere fois le 9 Mai au matin, Thermomètre de Délisle 152, Baromètre 28, 20 ou 28 $\frac{20}{155}$ pouces de Paris, vent d'Oueſt, ciel ſerein. Il recommença à géler le 9 Octobre matin, Thermomètre 152 d. Baromètre 28, 03, ciel nubileux, vent de NE. L'intervalle entre ces deux époques eſt de 153 jours.

3.

La Néva débacla le 18 Avril par un froid de 154 degrés: les glaçons du lac de Ladoga parurent le 26 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 9 Mai. Enſuite elle reſta libre & navigable pendant 205 jours. Le 20 Novembre réparurent les premieres glaces, & la riviere les charia jusqu'au 25 au ſoir, où elle fut priſe par un froid de 164 degrés, Baromètre 28. 35, ciel ſerein & vent d'Eſt.

4.

4.

La plus grande chaleur a été annotée le 12 Juillet à 2 heures après midi, de 109 degrés de Délisle, Baromètre 28,08, ciel demi couvert, vent d'Eſt. Elle fut ſuivie d'un grand orage avec pluie & un vent d'Oueſt très fort. La moindre chaleur obſervée depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre, c'eſt à dire pendant l'intervalle des 153 jours, entre la derniere gelée & la premiere, a été de 149 degrés le 10 Mai matin, Barom. 28,08, ciel ſerein, vent fort de l'Eſt: & le 8 Octobre au ſoir: Baromètre 27,90, ciel couvert, vent de l'Eſt. La différence entre ces deux chaleurs extrèmes eſt de 40 degrés de Delisle.

5.

La chaleur moyenne de l'après midi a été trouvée

depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre - - 126 degrés.
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre - 129 — —
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre - - 125 — —

De même la chaleur moyenne de la nuit:

depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre - - 135 degrés.
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre - - 137 — —
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre - - 133 — —

6.

La chaleur de l'après midi a été pendant notre intervalle de 153 jours d'Eté:

1 jour au deſſus de 110^{d}. le 12 Juillet.

25 jours

25 jours entre 120 & 110 en Mai – Aout (*).
85 jours entre 130 & 120 en Mai – Octobre (**).
38 jours entre 140 & 130 en Mai – Octobre.
4 jours entre 150 & 140 le 13. 14. 16 Sept. & le 8 Octobre.

(*) Le 17. 19. 21 Mai, le 2. 6. 8 – 12. 14 Juin, le 10. 11. 14 Juillet, & le 2 – 6. 9. 11. 12. 14. 15. 19 Août.

(**) Le 12. 13. 16. 18. 20. 23. 25. 31 Mai, le 1. 3. 5. 7. 13. 15. 16. 20 – 30 Juin, le 1 – 9. 13. 15 – 22. 26 – 31 Juillet, le 1. 7. 8. 10. 13. 16 – 18. 20. 22 – 31 Août, le 3. 4 6. – 11. 18. 20. 24. 26 – 28 Sept., & le 1. 4. 5 Oct.

7.

La Chaleur de la nuit a été pendant ce même intervalle:

1 jour au deſſus de 120 le 11 Juillet.
26 jours entre 130 & 120 en Juin, Juillet & Août (*).
95 jours entre 140 & 130 en Mai – Octobre.
31 jours entre 150 & 140 en Mai, Juin, Sept. & Octobre (**).

(*) Le 10. 11. 12. 15. 28 Juin, le 1. 5. 10. 12 – 16 Juillet, & le 1. 2. 4 – 12. 15. 16 Août.

(**) Le 9 – 12. 14. 15. 22 – 24. 26. 27. 29 Mai, le 18 Juin, le 3 – 6. 12 – 17. 19. 23. 24 Sept., & le 2. 3. 6. 7. 8 Octobre.

8.

8.

Les hauteurs & les variations du Baromètre obſervées depuis le 1er Mai juſqu'au 1er Novembre, ce qui fait un intervalle de 184 jours, ont donné les réſultats ſuivans.

La plus grande élévation 28, 51 le 6 Septembre à 10 h. avant midi. Thermomètre 132 d. ciel ſerein & calme.

La plus petite élévation 27, 31, le 20 Octobre à 3 h. matin. Thermomètre 143 d. ciel couvert, vent fort du Sud.

La variation totale 1, 20 ou $1\frac{1}{5}$ pouce.

Le milieu 27, 91.

La hauteur moyenne 27, 987, ou $27\frac{987}{1000}$ pouces de Paris.

Pendant ces 184 jours d'été la hauteur du Baromètre s'eſt trouvée 126 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$, $98\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28, & $54\frac{1}{2}$ jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9.

Les vents forts pendant ces 184 jours, depuis le 1er Mai juſq'au 1er Novembre, ont ſoufflé.

2 jours du Nord, le 18, & 27 Juin.

8 jours de l'Eſt, le 6 Mai, le 12. 30 Juillet, le 9. 24 Août, le 16 Sept., & le 3. 13 Oct.

4 jours du SE. le 16. 17. 21 Mai & le 14 Août.

3 jours du Sud, le 14 Juin & le 20. 21 Octobre.

7 jours du SOu. le 24 Mai, le 17. 18 Juillet, le 26 Août, le 28 Sept., & le 22. 27 Oct.

21 jours de l'Oueſt, le 3. 30 Mai, le 4 11. 15. 16. 19. 24. 25 Juin, le 5. 6. 14 22 Juillet, le 28 Août, le 1. 10. 22 Sept. & le 11. 15. 18. 23 Octobre.

10 jours du NOu, le 26. 29 Mai, le 7, 17. 23. 30 Juin, le 2. 23 Juillet, le 11 Sept., & le 14 Oct.

10.

Les vents très forts pendant ce même intervalle ont regné.

2 jours du SE. le 13 & 19 Mai.

2 jours du Sud, le 1 & 19 Octobre.

3 jours du SOu. le 14 Mai, le 12 Juin, & le 21 Septembre.

2 jours de l'Oueſt, le 29 & 30 Août.

1 jour du NOu. le 4 Juillet.

Le nombre de tous les jours venteux eſt par conſéquent 65, parmi leſquels ſe ſont trouvés dix de vents très forts. Au reſte ce ſont les vents de l'Oueſt qui ont été les plus fréquens dans le courant de cet été.

II.

Les autres variations de l'Atmoſphère ſont indiquées dans la table ſuivante.

Atmoſphère.	Mai	Juin	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Somme
Ciel entiérement ſerein	7	12	7	4	7	7	44 jours.
Ciel entiérement couvert	6	6	6	7	6	13	44 —
Brouillard - - -	3	1	—	3	4	2	13 —
Pluie { médiocre - -	11	7	13	12	10	10	63 } 100 j.
Pluie { copieuſe - -	3	5	7	12	6	4	37 }
Neige - - - -	2	—	—	—	2	3	7 jours.
Tonnère - - -	2	1	1	—	—	—	4 —
Orages complets -	1	1	2	2	—	—	6 —
Grèle - - - -	—	1	1	—	2	—	4 —
Aurores boréales - -	3	—	—	2	8	5	18 —
Hauteur de l'eau de pluie - - -	1,47	1,90	2,80	3,70	3,07	2,35	15, 29

La hauteur de l'eau de pluïe tombée pendant ces 6 mois d'été depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, eſt par conſéquent de 15 $\frac{29}{100}$ pouces de Paris.

Hyver de 1782 à 1783.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la premiere fois le 4 Septembre 1782 & pour la derniere fois le 26 Avril 1783: il y avoient donc 234 jours entre la premiere & la derniere neige.

2. Il géla pour la premiere fois le 9 Octobre: Thermom. de Délisle, à 7 h. du matin, 152 d. Baromètre 28,03, ciel nubileux, vent du NE: & pour la derniere fois le 4 Mai matin: Therm. 152 d. Baromètre 27, 87, nuages, vent de l'Oueſt. L'intervalle entre ces deux époques eſt de 208 jours: de 7 jours plus long que l'hyver paſſé.

3. La Néva fut priſe pendant 151 jours; depuis le 25 Novembre au ſoir, par un froid de 164 d., après avoir charié des glaces depuis le 20 Novembre; jusqu'au 25 Avril de grand matin, où elle debacla par une temperature de 147 d. Elle continua à charier des glaces jusqu'au 3 de Mai; les glaçons du Ladoga parurent le 8 de Mai en très grande abondance, & ils continuerent d'aller jusqu'àu 24 du même mois.

4. Le

4. Le plus grand froid a été de 201 degrés le 9 Janvier matin: Baromètre 28, 20. vent d'Eſt & ciel ſerein. Le moindre froid pendant l'intervalle des 208 jours d'hyver c'eſt à dire depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai, a été obſervé de 132 d. le 24 Avril à 2 h. aprés midi. Baromètre 28, 32, calme, brouillard, puis ciel ſerein. La différence entre ces deux extrèmes eſt de 69 degrés de Délisle.

5. Le froid moyen au matin & au ſoir a été trouvé:

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	166, 2	degrés
depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai -	163, 4	——
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin -	160, 2	——

Enſuite le froid moyen à midi:

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	158, 1	degrés
depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai -	156, 0	——
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin -	152, 0	——

Cet hyver a par conſéquent été plus rude que le précédent de 1781 à 1782: tant à l'égard de ſa durée qu'à celui de ſon intenſité.

6. Le froid au matin & au ſoir a été depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai.

1 jour au deſſous de 200 d. le 9 Janv.

7 jours entre 190 & 200 d. le 8. 10 — 13. 22. 23 Janv.

22 jours entre 180 & 190, le 8 – 15. 25. 26. 30 Déc. le 2. 7. 14. 17 – 19. 21. 24 Janv. & le 26 – 28 Février.

44 jours entre 170 & 180, le 26 – 29 Nov. le 1 – 7. 16 – 18. 24. 27. 29. 31 Déc. le 1. 3. 4. 6. 15. 16. 20. 25 – 28 Jan. le 7. 20. 21. 24. 25 Févr. & le 1. 2. 4. 10. 11. 14. 15. 17. 25. 27. Mars.

34 jours entre 160 & 170, en Nov. Déc. Janv. – Avril.

63 jours entre 150 & 160, en Oct. – Déc. Janv. – Mai.

37 jours entre 140 & 150, le 10. 11. 13. 17 – 25. 27 – 31 Oct. le 1 – 3. 7 Nov. le 1 Févr. le 29 Mars, le 2. 3. 16 – 18. 22 – 25. 29. 30 Avril, & le 1 – 3 Mai.

Il y avoient par conſéquent parmi nos 208 jours d'hyver, 171 jours des gélée, & 37 où il a dégelé les nuits.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de temps, a été dans

22 jours moindre que 140, le 17. 18. 20. 23. 28 Oct. le 2. 3. Nov. le 23. Mars, le 13. 17. 18. 21 – 25. 28 – 30 Avril, & le 1. 2. 4 Mai.

58 jours entre 150 & 140, le 9 – 16. 19. 21. 22. 24 – 27. 29 – 31 Oct. le 1. 4 – 8 Nov. le 31 Janv. le 1. 2. 12 – 15. 17 Févr. le 13. 19. 20. 22. 24. 28 – 31 Mars, le 1 – 5. 8 – 12. 14 – 16. 19. 20. 27 Avril & le 3 Mai.

33 jours entre 160 & 150, en Nov. Déc. Janv. – Avril.

34 jours entre 170 & 160, en Nov. Déc. Janv. – Mars.

29 jours entre 180 & 170, le 27 Nov. le 2 – 5. 8. 9. 12 – 17. 24 – 26. 30. 31 Déc. & le 1. 2. 7. 12. 16. 19 – 21. 24 – 36 Janv.

11

11 jours entre 190 & 180, le 10. 11 Déc. & le 8. 10. 11. 13. 14. 17. 18. 22. 23 Janv. enfin
1 jour entre 200 & 190, le 9 Janvier.
Il y avoient donc 80 jours de dégel parmi les 208 jours d'hyver, & 128 jours où il a gélé continuellement.

8. L'Etat du Baromètre depuis le 1. Novembre 1782 jusqu'au 1. Mai 1783.

La plus grande élévation 28. 81, le 2 Décembre à 12 heures du ſoir. Therm. 171, ciel couvert, vent du Sud.
La plus petite élévation 27. 10 le 28 Décembre à 6 heures du matin. Therm. 156, ciel couvert, vent très fort du Nord.
La variation totale 1. 71.
Le milieu 27. 955.
La hauteur moyenne 28. 087, c'eſt à dire 28 $\frac{87}{1000}$ pouces de Paris.
Le Baromètre s'eſt trouvé 143 jours au deſſus de 27 $\frac{9}{10}$, 107 jours au deſſus de 28, & 70 jours au deſſus de 28 $\frac{1}{10}$ pouces.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle des ſix mois d'hyver ont ſoufflé:

3 jours du *Nord*, le 11 Nov. 16 Mars & 6 Avril.
2 jours du *NE*, le 15 Mars & 27 Avril.
6 jours de l'*Eſt*, le 8. 22 Nov. 16 Déc. & le 11. 18. 19 Janvier.
2 jours du *SE.*, le 28 Févr. & 28 Mars.
4 jours du *Sud*, le 15 Nov. 8 Févr. 8 & 19 Mars.
6 jours du *SOu.*, le 19 Déc. 24. 26. 27. 28 & 29 Janv.

4 jours

4 jours de l'*Oueſt*, le 19. 23. 25 Février & le 30 Avril.
1 jour du *NOu.*, le 4 Mars.
En tout 28 jours de vent fort.

10. Les vents très forts ont regné
1 jour du *Nord*, le 28 Décembre.
1 jour du *NE.*, le 26 Avril.
1 jour du *Sud*, le 22 Février.
3 jours du *SOu.*, le 5. 31 Janv. & le 18 Février.
1 jour de l'*Oueſt*, le 4 Novembre.
En tout 7 jours de vent très fort: déſorte que cet hyver a été très peu venteux.

11. Les autres variations de l'Atmoſphère obſervées pendant ces mêmes ſix mois d'hyver, ſont indiquées dans la table ſuivante:

Atmoſphère.		Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars	Avr	Somme.
Ciel entiérement ſerein		5	6	10	5	8	11	45 jours.
Ciel entiérement couvert		16	11	10	14	10	9	70 jours.
Brouillard - - -		10	12	3	5	8	5	43 jours.
Pluïe	médiocre - -	5	0	0	2	1	5	13 } 14 jours.
	copieuſe - -	1	0	0	0	0	0	1
Neige	médiocre -	8	8	5	12	12	6	51 } 54 jours.
	copieuſe - -	0	2	0	0	1	0	3
Hauteur de l'eau de pluie & de neige - - -		152	62	67	64	103	111	5. 59 pouces.

Com-

Comparaiſon des inſtrumens météorologiques envoyés par l'Académie Electorale de Mannheim avec ceux de l'Académie Impériale des Sciences.

Hauteurs correſpondantes des Baromètres & Thermomètres.

I. Baromètre.

Année 1782.	Heure de l'Obſervat.	Baromètre de Manheim.	Haut. réd. en centiem. part. de P.	Baromètre de l'Académie.
		Pouc. lignes	Pouces $\frac{1}{100}$	Pouces $\frac{1}{100}$
Juillet le 23.	9. av. m.	27. 7. 0	27. 58	27. 57
24.	midi	27. 11. 8	27. 99	27. 98
25.	6. ſoir	28. 1. 8	28. 15	28. 13
26.	midi	28. 1. 5	28. 13	28. 12
26.	minuit	28. 1. 7	28. 14	28. 14
27.	6. ſoir,	28. 0. 2	28. 02	28. 03
Août le 29.	2. après m.	27. 4. 5	27. 38	27. 39
Sept. le 6.	10 avant m.	28. 6. 0	28. 50	28. 51
	minuit	28. 5. 5	28. 46	28. 48
7.	midi	28. 5. 7	28. 48	28. 49
	6. ſoir	28. 5. 0	28. 42	28. 45
Octobre le 20.	6. matin	27. 3. 5	27. 29	27. 31
Decemb. le 2.	11. ſoir	28. 9. 5	28. 79	28. 81
28.	6. matin	27. 1. 0	27. 08	27. 10
28.	6. ſoir	27. 2. 0	27. 17	27. 17
29.	midi	27. 1. 8	27. 15	27. 12

II. Thermomètre.

Année 1782.	Heure de l'Obſervation	Thermo-mètre de Mannh.	Thermo-mètre réduit.	Thermo-mètre de l'Académ.
Juillet		Réaum.	Déliſle.	Déliſle.
le 23.	6 matin	+ 6. 0	138. 8	138
24.	2 après m.	8. 0	135. 0	135
25.	2 après m.	10. 0	131. 3	132
26.	2 après m.	12. 5	126. 9	127
27.	10. ſoir	7. 8	135. 8	136
Août				
le 12.	2 après m.	18. 5	115. 6	116
19	2 après m.	17. 5	117. 1	118
29	2 après m.	11. 0	129. 3	129
Septembr.				
le 6.	6. matin	4. 0	142. 5	142
Octobre				
le 21	11. ſoir	2. 3	145. 9	147
Décembre				
le 27.	8. matin	− 14. 0	176. 2	176
28.	7. matin	12. 7	173. 9	175
29.	7. matin	9. 3	167. 1	168

Les

Les Baromètres & les Thermomètres s'étant ainſi trouvés très bien d'accord entr'eux, on a continué d'annoter leurs hauteurs après ceux de l'Académie; & les Inſtrumens de Mannheim furent dépoſés au cabinet de Phyſique, ainſi que l'aiguille aimantée, qui ne varie pas plus, que ne le font celles qui ſe trouvent à l'Obſervatoire.

OUVRAGES

imprimés & manuſcrits, curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentés ou communiqués à l'Académie pendant le dernier ſemeſtre de l'Année 1782.

Le Vendredi 8 Juillet. M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a préſenté de la part de M. *Banks* à Londres.

Reliquiae Houſtounianae, ſeu plantarum in America meridionali a *Gulielmo Houſtoun* collectarum icones, manu propria aerae inciſae, cum deſcriptionibus e ſchedis eiusdem in Bibliotheca *Joſephi Banks* asſeruatis.

Le Secrétaire a rapporté, que les inſtrumens météorologiques correſpondans envoyés par la Société Electorale de Météorologie, ſont arrivés & qu'aucun d'eux ne s'eſt trouvé endommagé; qu'il les a retiré chez lui pour les monter & les comparer enſuite avec les inſtrumens de l'Académie.

M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *de Magellan*, ſur les nouveaux teleſcopes de M. *Herſchel* qui approchent & augmentent les objets les plus éloignés, bien au delà des meilleures lunettes achromatiques.

Le

Le 16 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'éditeur, M. *Jean Bernoulli* Aſtronome royal à Berlin, les ouvrages poſthumes ſuivans du celebre Académicien *Lambert.*

Joh. Heinrich Lamberts logiſche und philoſphiſche Abhandlungen 1ᵉʳ Band. 8ᵛᵒ.

— — — deutſcher gelehrter Briefwechſel 1ᵉʳ und 2ᵗᵉʳ Band 8ᵛᵒ.

Le 12 Août. M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a remis pour la Bibliotheque académique, un imprimé intitulé

Enumeratio plantarum quae in horto viri Ill. atque Excell. *Procopii a Demidof* Moscuae vigent.

—— il a diſtribué des annonces en françois & en allemand, d'un Ouvrage botanique ſur les arbres, arbuſtes & plantes de l'Empire de Ruſſie, qui ſera publié par ordre & ſous les auſpices de S. M. Impériale. Voyez ci-deſſus pag. 9.

Le Secrétaire a remis deux avertiſſemens de M. *Zimmermann*, Profeſſeur de Mathematiques à Brunswig, l'un ſur l'etat préſent du Collège Carolin, & l'autre ſur deux collections très complettes de cartes géographiques & d'eſtampes à vendre.

—— enſuite le nouveau Programme des Prix propoſés pour 1782, par la Societé Hollandoiſe des Sciences établie à Harlem.

Le 19 Août. Le Secrétaire a remis les nouvelles cartes celeſtes, publiées par M. *Bode*, Aſtronome de l'Académie royale des Sciences de Berlin.

M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a préſenté de la part de M. le Duc de *Croy*:

Mémoire ſur le paſſage par le Nord, qui contient auſſi des reflexions ſur les glaces.

Le même Académicien a auſſi remis pour le jardin botanique, quelques ſemences qui lui avoient été envoyées de Paris.

Le 26 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Fried. Guillaume Gerlach*, maître d'Hiſtoire & de Philoſophie à Vienne, qui envoie & ſousmet à l'approbation de l'Académie, un imprimé intitulé

Die Beſtimmung der Geſtalt und Grösſe der Erde.

M. *Pallas* a lu une lettre de M. *Hablitzl*, datée d'Aſtrabat le 17 Juillet, & contenant diverſes obſervations de Phyſique & d'Hiſtoire naturelle.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Chevalier de *Coudray* à Paris, qui envoie la brochure intitulée

Le Comte & la Comteſſe du Nord, anecdote ruſſe.

Le 2 Septembre. M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *Maskeline*, Aſtronome royal à Greenwich, qui communique diverſes obſervations ſur la nouvelle planete de *Herſchel*, (Uranus), & qui propoſe une perfection nouvelle des teleſcopes à reflection.

Le

Le même Académicien a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar för År 1781: quatre cahiers.

Inſtitutiones Neurologicae, ſive de nervis corporis humani tractatio: auctore *Rolando Martini*. Sectio I. Phyſiologica Holmiae 1781.

Laboratorium chemicum, af *Guſtaf von Engenſtröm.*

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Jährig*, une traduction allemande de la Chronologie des deux premiers tiges des Patriarches mongaux; l'Académie la remit à M. le Conſ. de Coll. *Pallas* pour en faire uſage dans ſon hiſtoire des nations mongales.

Le 12 Septembre. Le Secrétaire a remis.

1.) de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris: Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences A. 1778, avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

2.) de la part des éditeurs Mrs. l'Abbé *Rozier*, Mongez le jeune & de la Métherie

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts: treize cahiers depuis Avril 1781. jusqu'au même mois de 1782, y compris.

Le 16

Le 16 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part des Auteurs:

Phyſique du monde, dédiée au Roi, par M. le Baron de *Marivetz* & par M. *Gouſſier*. Tom. I. & II.

Hiſtoire de l'Aſtronomie moderne, depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'epoque de 1782. par M. *Bailly*.

Le 23 Septembre. M. l'Adjoint *Fuſs* a préſenté de la part de M. *Jacques Fries*, Chirurgien du Gouvernement de Yaroslavl', les obſervations météorologiques qu'il a faites en divers endroites des Gouvernemens de Yaroslavl' & de Wologda, pendant les années 1781 & 1782; ainſi qu'une ſuite non interrompue des obſervations météorologiques faites à Kola en 1781, & une Table qui marque les époques du débacle & de la priſe du Wolga à Yaroslavl', depuis l'année 1735 jusqu'à 1782.

Le 30 Septembre. M. le Conſ. de Coll. *Pallas* a remis un Iguan empaillé, (*Lacerta Iguana* Linn.) que *Sa Majeſté l'Impératrice* avoit reçu du Gouverneur Général de Livonie, Comte de *Brown*, & envoyé à l'Académie pour être conſervé au Cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 7 Octobre. M. le Conſ. de Cour *Lepechin* a lu une lettre de M. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui contient diverſes nouvelles littéraires.

Le 17 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyef* a expoſé & remis, pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle, 25 oiſeaux empailles, qu'il avoit apportés de ſon dernier voyage.

M.

M. l'Adjoint *Géorgi* a préſenté & lu, une continuation de ſes expériences ſur l'inflammabilité ſpontanée du chanvre & de diverſes autres matieres.

Le 24 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyef* a remis pour le Cabinet des monnoyes & médailles, dix pieces antiques en cuivre, qu'il avoit eu occaſion d'acquerir à Conſtantinople; & une onzieme moderne frappée l'année derniere, ſous le regne du Khan Schahingueray de la Crimée.

La Commiſſion académique a envoyé de la part de M. le Général-Major de *Klitſchka*, Gouverneur d'Irkoutzk' & Chevalier de l'Ordre militaire de St George:

1. Une déſcription des isles Kouriles, extraite des Journaux du Sotnik *Ivan Tſchernoi*, du Bas-Officier & Interprète *Otſchereänoi*, & du Gentil-homme Sibérien *Antipin.*

2. Un Dictionnaire Japonois par le Disciple *André Tatarinof.*

3. Une copie de la carte du Capitaine *Cook*, avec des remarques du Sotnik *Kobelev.*

4. Une repréſentation de la revue des Ruſſes par les Japonois.

La même Commiſſion a encore communiqué un mémoire du Comptoir des nouveaux magazins de bleds, qui demande une inſtruction, pour garantir par le moyen des conducteurs, ces nouveaux bâtimens des effets de la foudre. M. le Conſ. de Cour *Roumovski* & le Se-

 cré-

crétaire ont été chargés, de ſe rendre à ces magazins, & de dreſſer l'inſtruction qu'on demande.

M. le Prof. *Lexell* a préſenté de la part de la Société royale des Sciences de Londres la 2de partie du LXXIe. Volume des Philoſophical Transactions.

Le 28 Octobre. M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a remis une lettre de M. le Docteur *Brückmann* de Brunswig, qui envoie un avis imprimé concernant une momie & diverſes autres antiquités, qu'il offre en vente.

—— une lettre de M. *Court de Gébelin*, Préſident du Muſée de Paris, qui annonce un ouvrage nouveau de M. *Dupuis* Membre du même Muſee, qui va paroitre ſous le titre:

Traité d'Architecture, comprenant les cinq ordres des anciens, établis dans une juſte proportion entr'eux.

Le 7 Novembre. M. l'Adjoint *Zouref* a expoſé & préſenté pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle, la collection des foſſiles & minéraux qu'il a ramaſſés dans ſon dernier voyage, avec un catalogue exact & détaillé, qu'il en a fait.

Le 5 Décembre. Le Secrétaire a remis:

Catalogus der ſeit vielen Jahren berühmten vollſtändigen hebräiſchen Bibliothek des ehemahligen Präger Ober-Rabbiners Hrn. *David Oppenheimers.*

M.

M. *Iſaak Seligmann Berend Salomon* à Hambourg, propriétaire actuel de cette Bibliothéque hebraïque, l'offre à l'Académie, qui lui a fait répondre que des pareilles acquiſitions n'entrent point dans ſon plan.

—— Il a lu une lettre de M. le Conſeiller d'Etat actuel de *Péterſon*, Miniſtre Réſident à Dantzig, qui envoie pluſieurs exemplaires d'un Ouvrage latin, intitulé *Parerga hiſtorica*, que l'auteur M. l'Echevin *Uphagen*, l'a prié d'adreſſer au Secrétaire de l'Académie pour en faire la diſtribution conformement à ſes vües. Le Secrétaire s'en eſt acquitté & en a remis des exemplaires pour la Bibliothèque, pour le Directeur & pour divers Membres de l'Académie, auxquels cet ouvrage auſſi précieux que profond a pu intéreſſer.

Le 16 Décembre. M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* a lu une lettre de M. *Crome* de Deſſau, qui lui a adreſſé pour préſenter de ſa part à l'Academie, la carte des productions de l'Europe, avec un livre pour ſervir à l'intelligence de cette carte, intitulé:

Europens Producte. Zum Gebrauch der neuen Producten Carte von Europa. Deſſau in 8vo.

M. l'Adjoint *Fuſs* a préſenté de la part de M. *Fries* Chirurgien à Yaroslavl', deux Catalogues, l'un de 19 villes du Gouvernement de Wologda, avec leurs diſtances exactes de Wologda, de Moscou & de St. Petersbourg; l'autre de 14 villes ſituées ſur la grande route de Moscou à Archangel, avec leurs diſtances de Moscou.

Le 19 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Abbé *Rozier*, les mois de Mai & de Juin de ſon Journal de Phyſique pour 1782.

Le même a préſenté régulierement tous les mois de l'année, les obſervations méteorologiques faites à Moscou par M. l'Aſſeſſeur *Engel*, ainſi qu'un extrait de celles que M. l'Académicien *Béguelin* a faites à Berlin; & que ces deux ſavans ont bien voulu communiquer jusqu'ici à l'Académie.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE TRAIECTORIIS RECIPROCIS TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hic de Traiectoriis reciprocis problema, quod olim ſummo ſtudio inter Geometras fuit agitatum, qua occaſione maxima incrementa in Analyſin ſunt inuecta, eiusmodi poſtulat lineas curuas E C F, circa axem A C B deſcribendas, vt, ductis vtrinque ad aequalia interualla rectis M P et N Q axi parallelis, ſumma angulorum $\zeta + \eta$, quos curua cum binis hisce rectis conſtituit, vbique ſit eadem. Hoc enim modo fiet, vt, ſi eadem curua circa axem inuertatur in ſitum E' M' N' F' et ſecundum axem motu ſibi parallelo, ſicque punctum N' vsque in M promoueatur, an- Tab. I. Fig. 1.

gulus interſectionis fiat $= \zeta + \nu$. Quoniam autem eximia artificia, quae olim hac occaſione ſunt exogitata, has in diſperſa reperiuntur, operam equidem non perdidiſſe videor, ſi, methodo vniformi vſus, omnia ſuccincte ante oculos poſuero: praecipue cum nonnulla plane noua adiicere contigerit.

Solutio
huius quaeſtionis in genere concepta.

§. 2. Quod ſi ergo angulum interſectionis propoſitum ponamus $= 2\alpha$, vt ſit $\zeta + \nu = 2\alpha$, tum vero ſtatuamus angulum $\zeta = \alpha - \omega$, fiet alter angulus $\nu = \alpha + \omega$. Vnde patet, angulum ω ita eſſe debere comparatum, vt, facto intervallo ab axe negatiuo, ille abeat in ſui negatiuum, ſeu in $-\omega$. Quo nunc hanc conditionem facilius ad calculum reuocemus, ducatur ad axem recta directrix
Tab. I GAH, quae cum axe AB faciat angulum $BAG = 2\alpha$;
Fig. 2. ac ipſa curua referatur ad hanc directionem per coordinatas obliquangulas $AP = x$ et $PM = y$; quo pacto pro puncto altero N abſciſſa AP abibit in ſui negatiuum $-x$. Cum nunc ſit $\zeta = \alpha - \omega$, manifeſtum eſt angulum ω eſſe debere functionem imparem ipſius x, ita vt, ſumto x negatiuo, etiam angulus ω fiat negatiuus. Hoc modo iam id ſumus lucrati, vt ſolum curuae punctum M conſideraſſe ſufficiat; quandoquidem hac ratione ſimul conditio alterius puncti N adimpletur.

§. 3. Conſideretur nunc curuae elementum Mm, et ducta applicata proxima pm, directrici AG agatur parallela Mrs, eritque $Mr = Pp = dx$ et $rm = dy$; angulus

gulus vero $m r s = 2 \alpha$. Vnde cum ſit angulus $M m r = \zeta = \alpha - \omega$, erit angulus $m M r = \alpha + \omega$, vnde ex Trigonometria ſequitur fore

$$d x : d y = \text{ſin.}\,(\alpha - \omega) : \text{ſin.}\,(\alpha + \omega), \text{ ideoque}$$
$$\frac{d y}{d x} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}.$$

§. 4. Ponamus nunc ad differentialia euitanda $d y = p d x$, ita vt indoles curuae etiam per aequationem inter x et p determinari poſſit. Hanc ob rem habebimus $p = \frac{d y}{d x} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}$; vnde patet, quantitatem p ita comparatam eſſe debere, vt, ſumto angulo ω negatiuo, ea abitura ſit in $\frac{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}$, qui valor prioris eſt reciprocus. At vero angulus ω fit negatiuus, quando abſciſſa x negatiua accipitur; vnde patet, quantitatem p talem eſſe debere functionem ipſius x, vt poſito $-x$ loco x ea abeat in $\frac{1}{p}$.

§. 5. Tota ergo ſolutio noſtri problematis huc redit, vt omnes functiones ipſius x in genere inueſtigentur, quae, dum loco x ſcribatur $-x$, abeant in ſui negatiuas. Et, quod hoc loco imprimis eſt notandum, iſta proprietas ad omnes plane angulos obliquos extenditur, quippe quae conditio tantum inclinationem applicatarum ad abſciſſas afficit; ita vt, quaecunque aequatio inter x et y inuenta problemati ſatisfecerit, eadem pro omnibus angulis interſectionum aeque valeat; dummodo obliquitas coordinatarum ipſi angulo interſectionis aequalis ſtatuatur. Ita, dummodo problema pro angulo interſectionis recto fuerit ſolutum, eadem ſolutio facillime ad omnes interſectionis angulos obliquos transferri poterit. Et quoniam tantum obliquitatem coordinatarum immutari opus eſt, ſi lineae inuen-

 tae

tae fuerint algebraicae, eae hac translatione perpetuo ad eundem ordinem pertinebunt.

§. 6. Quia igitur inuentio functionum reciprocarum vniuerſam huius quaeſtionis ſolutionem in ſe complectitur, facili negotio innumerabiles huiusmodi functiones exhibere licet. Inter quas primum occurrit formula $p = e^{nx}$: ſumto enim x negatiuo, haec formula abit in hanc: $\frac{1}{p} = e^{-nx}$. Hinc cum ſit $p = \frac{dy}{dx}$, fiet $dy = e^{nx}dx$ ideoque $y = \frac{1}{n}e^{nx}$, ſiue $l n y = n x$, quae eſt aequatio pro logarithmica. Deinde etiam quaſi ſponte ſe offert haec formula: $p = \frac{a-x}{a+x}$, quippe quae, mutato ſigno ipſius x, abit in $\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{p}$. Hinc autem fiet

$$y = \int \frac{a-x}{a+x} dx = -x + 2al(a+x), \text{ ſiue}$$

$$y + x = 2al\frac{a+x}{a}$$

quae curua etiam per logarithmicam facile conſtrui poteſt. Praeterea etiam patet ſumi poſſe $p = \frac{aa-bx+xx}{aa+bx+xx}$; ſumto enim x negatiuo prodit $\frac{1}{p} = \frac{aa+bx+xx}{aa-bx+xx}$. Hocque modo innumerabiles alias ſimiles formulas excogitare licet praeſcriptae conditioni ſatisfacientes.

§. 7. Quo autem rem generalius expediamus, denotent litterae P, R et T functiones quaſcunque pares ipſius x, quae ſcilicet maneant eaedem, licet loco x ſcribatur $-x$. At vero Q, S et V denotent functiones impares ipſius x, quae ſcilicet abeant in ſui negatiuas, cum pro x ſcribitur $-x$; ac manifeſtum eſt, conditioni noſtrae ſatisfieri, ſi ſtatuatur $p = \frac{P-Q}{P+Q}$: atque adeo generalius

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m}.$$

Quin

Quin etiam tales formulae coniungi poſſunt, vt ſit

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m} \cdot \frac{(R-S)^n}{(R+S)^n} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k}.$$

Perſpicuum enim eſt hoc modo, ſi loco x ſcribatur $-x$, litteram p abituram eſſe in $\frac{1}{p}$. Haec ergo Solutio cum ſit generaliſſima, nulla plane laborat difficultate, ſiquidem curuis transcendentibus contenti eſſe velimus.

De curuis algebraicis quaeſtioni ſatisfacientibus.

§. 8. Verum ſi lineae algebraicae deſiderentur, haud ita facile patet, cuiusmodi functiones loco P, Q, R, S, etc. accipi oporteat, vt formula $\int p\,dx = y$ fiat integrabilis. Singularis quidem caſus haud difficulter ſe offert ſumendo $p = (x + \sqrt{1 + xx})^n$, quippe quae functio etiam eſt reciproca: Scripto enim $-x$ loco x ea abit in

$$\frac{1}{p} = (-x + \sqrt{1 + xx})^n = \frac{1}{(x + \sqrt{1 + xx})^n}.$$

Notum autem eſt formulam hinc ortam

$$y = \int dx\,(x + \sqrt{1 + xx})^n$$

ſemper eſſe integrabilem, ſolis caſibus $n = 1$ et $n = -1$ exceptis. Quod ſi enim ponatur

$$x + \sqrt{(1 + xx)} = v, \text{ fiet}$$

$$x = \frac{vv - 1}{2v} \text{ et } dx = \frac{dv(vv + 1)}{2vv},$$

vnde cum ſit $y = \int v^n\,dx$, erit

$$y = \frac{v^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{v^{n-1}}{2(n-1)};$$

ex qua formula innumerae curuae algebraicae elici poſſunt, atque adeo ex ſingulis curuarum ordinibus, ſi modo ordo

ſecun-

ſecundus et tertius excipiatur, dum ſcilicet loco n ſucceſſiue ſcribantur non ſolum numeri integri 2, 3, 4, 5, 6 etc. ſed etiam fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. Quin etiam reliquae fractiones pro n aſſumtae in plures ordines adhuc nouas curuas ſuppeditabunt, quemadmodum iam alio loco eſt oſtenſum.

§. 9. Aeque foecunda etiam eſt haec formula:

$$p = (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n,$$

ita vt hinc fiat

$$y = \int dx\,(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n:$$

euidens enim eſt, ſumto valore x negatiuo etiam $x^{\frac{1}{3}}$ fieri negatiuum, at vero $x^{\frac{2}{3}}$ ſignum ſuum retinere. Ad hanc igitur formulam integrandam faciamus primo $x^{\frac{1}{3}} = z$, vt fiat $x = z^3$, hincque

$$y = \int 3zz\,dz\,(z + \sqrt{1 + zz})^n.$$

Nunc ponatur vt ante $z + \sqrt{(1 + zz)} = v$, eritque

$$z = \frac{vv - 1}{2v} \text{ es } dz = \frac{dv\,(1 + vv)}{2vv}.$$

Quare cum ſit $y = 3\int zz\,dz \cdot v^n$, erit

$$y = 3\int \frac{dv\,(vv-1)^2}{4vv}\,\frac{(1+vv)}{2vv}\,v^n = \frac{3}{8}\int \frac{dv}{v^4}(vv-1)^2(vv+1)v^n,$$

quae aequatio euoluta et integrata praebet

$$y = \frac{3}{8}\left(\frac{v^{n+3}}{n+3} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^{n-1}}{n-1} + \frac{v^{n-3}}{n-3}\right),$$

vbi eſt $v = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1 + x)^{\frac{2}{3}}}$. Eodem modo patet, etiam poni poſſe

$$p = (x^{\frac{1}{5}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{5}}})^n;$$

tum

tum vero etiam

$$p = (x^{\frac{1}{7}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{7}}})^n,$$

$$p = (x^{\frac{1}{9}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{9}}})^n,$$

quibus aſſumtis perpetuo integratio ſuccedet.

Alia methodus

curvas algebraicas quaeſtioni ſatisfacientes inueſtigandi.

§. 10. Alium autem fontem multo vberiorem aperiemus ad curuas algebraicas perueniendi. Introducatur ſcilicet noua variabilis z, cuius x ſit functio impar, ita vt ſumto z negatiuo etiam x abeat in $-x$; tum vero ſit P functio quaecunque par ipſius z, at Q eiusdem functio impar quaecunque; ac manifeſtum eſt etiam hanc formam: $p = \frac{P - Q}{P + Q}$ ſatisfacere. Vbi notaſſe iuuabit, hanc formam aeque late patere ac poteſtates eius quascunque; quandoquidem quaelibet euolutae continent vel functiones pares vel impares, vbi pares ſeorſim ſumtae, ac denique impares ad hanc ipſam formam reducuntur. Hinc ergo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}$, vnde ſtatui poterit

$$dx = M\,dz\,(P + Q) \text{ et } dy = M\,dz\,(P - Q),$$

vbi autem quantitas M ita debet eſſe comparata, vt prodeat x functioni impari ipſius z aequalis. Quod quo facilius impetrari poſſit ſumamus $M = R\,(P - Q)$, exiſtente R functione pari ipſius z; ſic enim fiet

$$dx = R\,dz\,(PP - QQ) \text{ et } dy = R\,dz\,(PP - 2PQ + QQ),$$

vbi cum ſit PP — QQ functio par ipſius z, valor pro x ſponte euadet functio impar. Obtinebitur igitur:

$$x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz \text{ et}$$
$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz.$$

Facillime autem nunc pro P, Q, R eiusmodi functiones aſſignare licebit, vt ſingulae hae formulae fiant integrabiles. Veluti ſi earum loco poteſtates ipſius z accipiantur, vel etiam formulae rationales integrae quaecunque.

De parabola cubicali ſecunda

tanquam ſimpliciſſima curua Problemati ſatisfaciente.

§. 11. Simpliciſſimus caſus hinc deducetur ſi ſumatur $P = a$ et $Q = -z$, vnde fit

$$x = \int aaR\,dz - \int zzR\,dz \text{ et}$$
$$y = \int aaR\,dz + 2\int azR\,dz + \int zzR\,dz.$$

Nunc porro ſumamus $R = \frac{1}{bb}$, et integrando prodibit

$$bbx = aaz - \tfrac{1}{3}z^3 \text{ et } bby = aaz + azz + \tfrac{1}{3}z^3.$$

Vbi tantum opus eſt quantitatem z eliminare, vt aequatio inter coordinatas x et y obtineatur, id quod per ſequentes operationes commodiſſime expedietur.

§. 12. Addantur duae aequationes inuentae, vt prodeat haec:

$$bb(x+y) = 2aaz + azz, \text{ vnde fit}$$
$$zz + 2az = \tfrac{bb}{a}(x+y),$$

ideoque

ideoque (addendo vtrinque $a a$) prodibit

$$(z + a)^2 = a a + \frac{b b}{a}(x + y).$$

Ponatur breuitatis gratia

$$a a + \frac{b b}{a}(x + y) = \frac{b b v}{a},$$

ita vt ſit $v = x + y + \frac{a^3}{b b}$, eritque $z = b \frac{\sqrt{v}}{a} - a$.

Cum igitur ſit

$$b b x = \frac{z}{3}(3 a a - z z), \text{ ſiue}$$

$$3 b b x = z(3 a a - z z) = -2 a^3 - \frac{b^3 v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} + 3 b v v$$

erit

$$b^3 \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = -2 a^3 + 3 b b(v - x) = a^3 + 3 b b y.$$

§. 13. Ponatur breuitatis gratia $\frac{a^3}{b b} = 3 c$, ſiue $a^3 = 3 b b c$, et noſtra aequatio tranſibit in hanc:

$$b \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = 3(c + y)$$

et quia $b b = \frac{a^3}{3 c}$, erit $b = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{3 c}}$; quo valore ſubſtituto aequatio noſtra erit

$$v \sqrt{\frac{v}{3 c}} = 3(c + y).$$

Vnde patet, hanc curvam ad parabolam cubicalem ſecundam quodammodo referri poſſe.

§. 14. Ad hoc clarius oſtendendum ſit AB noſter axis et M punctum quodcunque in curua, vnde ad axem AB ducatur recta MU, ita vt ſit angulus MUB $= 2\alpha$, eritque AU $=$ PM $= y$ et UM $=$ AP $= x$. Iam cum ſit $v = x + y + 3 c$, prolongetur recta BAD ita, vt ſit AD $= 3 c$ ideoque DU $= y + 3 c$. Nunc ex D ducatur recta DT, ita vt, MU producta in T, fiat UT $=$ UD, Tab. I. Fig. 3.

 ideoque

ideoque $TM = x + y + 3c = v$. Quia igitur triangulum DUT eſt iſosceles, erunt anguli UTD et UDT aequales $= 90° - \alpha$. Hinc ergo erit

$$DU : DT = \text{coſ.}\, \alpha : \text{ſin.}\, 2\alpha = 1 : 2\, \text{ſin.}\, \alpha,$$

vnde cum ſit $AU = y$, capiatur $AE = \frac{1}{3} AD$, eritque

$$DE = EF = 2c \text{ et } EU = y + c.$$

Nunc ex E ipſi UT agatur parallela EF, eritque

$$EU : FT = 1 : 2\, \text{ſin.}\, \alpha;$$

quare ſi vocemus rectam $FT = t$; erit $y + c : t = 1 : 2\, \text{ſin}\, \alpha$, vnde colligitur $y + c = \frac{t}{2\, \text{ſin.}\, \alpha}$.

§. 15. His praemiſſis punctum curuae M referamus ad has duas coordinatas: $FT = t$ et $TM = v$, eritque aequatio noſtra $\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{3c}} = \frac{3t}{2\, \text{ſin.}\, \alpha}$, ſiue aequatio inter t et v nunc erit $\frac{v^3}{3c} = \frac{9tt}{4\, \text{ſin.}\, \alpha^2}$, ſiue $v^3 = \frac{27ctt}{4\, \text{ſin.}\, \alpha^2}$. Vnde patet, hanc curuam recte vocari parabolam cubicalem ſecundam, ſi modo applicatae MT ad abſciſſas FT inclinentur angulo $FTM = 90° - \alpha$, cui etiam aequalis eſt angulus DFE. Atque ex hac aequatione facile erit curuam quaeſitam deſcribere.

Tab. I. Fig. 4. §. 16. Producamus rectam FE in infinitum, quam inſtar axis ſpectemus, ad eamque ex quouis puncto curvae M ducamus rectam MV ipſi FT parallelam, vt angulus FVM ſit $90° - \alpha$, eritque nunc abſciſſa $FV = v$ et applicata $VM = t$, quae per abſciſſam ita definitur, vt ſit $t = 2v\, \text{ſin.}\, \alpha . \sqrt{\frac{v}{27c}}$. Vnde patet ſingulis abſciſſis FV geminam reſpondere applicatam $VM = t$ et $VM = -t$;

curua

curua igitur duobus conſtabit ramis in puncto T cuſpidem conſtituentibus, vbi recta F V vtrumque ramum tangit. Ambo autem rami in infinitum excurrent, dum ſcilicet abſciſſae FV in infinitum augentur.

§ 17. Deſcripta igitur tali curua ex aequatione $v^3 = \frac{27\,c\,t\,t}{4\,\sin.\alpha^2}$, eius parametrum vocemus more ſolito $= f$, vt ſit $v^3 = f\,t\,t$, eritque $\frac{27\,c}{4\,\sin.\alpha^2} = f$, ideoque $c = \frac{4\,f\,\sin.\alpha^2}{27}$, ita vt ex cognita parametro f vna cum angulo $90° - \alpha$, ſub quo applicata V M ad abſciſſam F V inclinatur, innoteſcat valor ipſius c. Quo notato capiatur a puncto F interuallum $F E = 2\,c = \frac{8\,f\,\sin.\alpha^2}{27}$, et ex hoc puncto E agatur recta E B, ita vt fiat angulus $V E B = 2\,\alpha$, eritque haec recta E B axis conuerſionis pro traiectoria, atque curua circa hunc axem conuerſa et ſecundum directionem axis promota ſe inuicem ſecabit vbique ſub angulo $= 2\,\alpha$, id quod non parum mirum videbitur, cum ad dextram exigua exſtat portio curuae, quae inuerſa non toti arcui ad ſiniſtram ſito occurrere poſſe videtur.

§. 18. Vt huic dubio occurramus, ex M ducatur recta axi parallela M S, ita vt ſit angulus $V S M = 90° - \alpha$, erit angulus $S M V = 90° - \alpha$, ideoque $M S = S V$; vnde cum ſit $V M = t$, erit $S V = S M = \frac{t}{2\,\sin.\alpha}$. Hinc cum ſit $F V = v$, erit interuallum $F S = v - \frac{t}{2\,\sin.\alpha}$, vnde ob $t = \frac{v\,\surd v}{\surd f}$ erit hoc ſpatium $F S = v - \frac{v\,\surd v}{2\,\sin.\alpha\,.\,\surd f}$, quod, dum quantitas v continuo augetur, neutiquam in infinitum excreſci poteſt, ſed potius tandem accipiet ſitum negatiuum. Vnde patet, hoc interuallum non vltra certum terminum

 vsque

vsque excreſci poſſe. Ad quem terminum inueniendum differentiale huius formulae nihilo aequetur, atque obtinebitur haec aequatio: $1 - \frac{3\sqrt{v}}{4\,\text{ſin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f}} = 0$, vnde fit

$$\sqrt{v} = \tfrac{4}{3}\,\text{ſin.}\,\alpha\,.\sqrt{f} \text{ et } v = \tfrac{16}{9} f\,\text{ſin.}\,\alpha^2.$$

Hinc igitur maximum iſtud ſpatium reperietur $= \frac{16}{27} f\,\text{ſin.}\,\alpha^2$. Cum igitur eſſet $FE = \frac{8}{27} f\,\text{ſin.}\,\alpha^2$; patet, ſpatium hoc maximum F S praeciſe duplum eſſe ſpatii F E, ita vt ſit E S = F E. Quia igitur curua F M non vltra hanc rectam S M porrigitur, neceſſe eſt vt curua in puncto M rectam S M tangat; vnde patet, totum ramum curvae E M a portione E F in ſitum inuerſum translata in omnibus punctis ſecari poſſe; et quia ramus vlterior vltra M protenſus continuo magis ad ſiniſtram vergit, ex eo intelligitur, ſingulis punctis vtriusque rami reſpondere puncta correſpondentia, ſiue in eodem ramo ſiue in altero, quae in interſectione conuenire queant. Haec igitur curua talem habebit formam, vti in hac figura repraeſentatur, vbi plura puncta correſpondentia pluribus litteris inſigniuimus; ſcilicet punctum a, vbi curua per axem tranſit, ſibi ipſi reſpondet; tum vero punctis b, c, d, etc. reſpondent puncta b', c', d', etc. Vnde patet, nullam huius curuae per ambos ramos in infinitum excurrentis portionem eſſe otioſam, vti olim Geometris erat viſum, ſed cuilibet puncto vbicunque accepto reſpondere punctum determinatum ſibi ſocium.

Tab. I. Fig. 5.

§. 19. Haec igitur curua tertii ordinis ſine dubio eſt ſimpliciſſima linea traiectoria reciproca algebraica: infinitas autem alias ex iisdem generalibus, quas dedimus, ſcilicet $x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz$ et

$y =$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz$$

eliciuntur, ſi modo loco P et Q functiones pares ipſius z accipiantur, loco Q autem functio impar; ita tamen, vt ſingulae hae formulae integrationem admittant; cui quidem conditioni facillime ſatisfieri poteſt. Vt caſus ſaltem ſimpliciores eruamus, denotent litterae m et n numeros pares, littera vero i imparem, et ſtatuamus $P = fz^m$, $Q = gz^i$ et $R = z^n$, ex quibus valoribus orientur ſequentes formulae pro x et y:

$$x = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1} \text{ et}$$

$$y = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{2fgz^{m+n+i+1}}{m+n+i+1} + \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}.$$

Hic autem imprimis eſt monendum, ſimulac pro litteris m, n et i maiuſculi numeri accipiantur, tum eliminando litteram z aequationem inter x et y ad plurimas dimenſiones exſurgere, atque adeo eliminationem nequidem expediri poſſe.

§. 20. Interim tamen, quicunque valores idonei functionibus P, Q, R tribuantur, vt curuae algebraicae reſultent: tamen omnes hae ſolutiones tantum pro particularibus ſunt habendae, cum ſine dubio innumerabiles aliae dentur curuae algebraicae quaeſtioni ſatisfacientes, quae tamen in his caſibus non contineantur. Quamobrem merito deſideratur eiusmodi methodus generalis, quae omnes plane curuas algebraicas in ſe complectatur; atque talem methodum iam ante plures annos communicaui, quam hic repetere ſuperfluum foret. Verum tamen eandem ex principiis maxime diuerſis, viaque longe ſimpliciori,

ciori, hic adiungam, quae ita eſt comparata, vt ad alia inſignia inuenta ducere poſſe videatur.

Methodus generalis
inueniendi traiectorias reciprocas algebraicas.

§. 21. Primum igitur obſeruo, formulam ſimplicem ipſo initio inuentam $p = \frac{P + Q}{P - Q}$, ita late patere, vt reliquas magis compoſitas, quas exhibuimus, in ſe complectatur, cum facta euolutione tam numerator quam denominator reducatur ſiue ad ſummam ſiue ad differentiam binarum formularum, quarum altera ſit functio par, altera vero impar ipſius z. Nunc igitur cum $\frac{Q}{P}$ ſit etiam functio impar, faciamus $Q = Pq$, fietque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + q}{1 - q}$, vbi q denotat functionem imparem ipſius z. Neceſſe igitur eſt vt etiam x fiat functio impar ipſius q, quamobrem hanc formulam ita exhibeamus: $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + q)^2}{1 - qq}$, vt denominator euadat functio par ipſius q.

§. 22. Cum igitur debeat eſſe

$$dx : dy = 1 - qq : (1 + q)^2,$$

ſtatuamus:

$$dx = dS\,(1 - qq) \text{ et } dy = dS\,(1 + q)^2,$$

eritque per notam formularum integralium reductionem:

$$x = S\,(1 - qq) + 2\int S\,q\,dq \text{ et}$$

$$y = S\,(1 + q)^2 - 2\int S\,dq\,(1 + q),$$

vbi patet, functionem S eſſe debere imparem ipſius q, vt etiam x talis prodeat functio. Hoc igitur modo rem perduximus

duximus ad formulas integrales $\int S\,q\,d\,q$ et $\int S\,d\,q\,(1+q)$, quas integrabiles reddi oportet. Hunc in finem ſtatuamus $S = \frac{d\,T}{d\,q}$, et nunc T eſſe oportet functionem parem; vnde eadem adhibita reductione fit

$$\int S\,q\,d\,q = \int q\,d\,T = q\,T - \int T\,d\,q \text{ et}$$
$$\int S\,d\,q\,(1+q) = T\,(1+q) - \int T\,d\,q;$$

ſicque totum negotium huc eſt perductum, vt $\int T\,d\,q$ integrabilis reddatur. Ponatur igitur $T = \frac{d\,V}{d\,q}$, vbi patet, V eſſe debere functionem imparem ipſius q, ſicque erit $\int T\,d\,q = V$. Hoc igitur modo omnia ad integrabilitatem ſunt perducta.

§. 23. Tota ergo Solutio huc redit, vt pro V functionem quamcunque imparem ipſius q accipere liceat. Et cum poſuerimus $T = \frac{d\,V}{d\,q}$, ſumto elemento $d\,q$ conſtante erit $d\,T = \frac{d\,d\,V}{d\,q}$, hincque $S = \frac{d\,d\,V}{d\,q^2}$; quibus valoribus ſubſtitutis ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \frac{d\,d\,V\,(1-q\,q)}{d\,q^2} + \frac{2\,q\,d\,V}{d\,q} - 2\,V \text{ et}$$
$$y = \frac{d\,d\,V\,(1+q)^2}{d\,q^2} - \frac{2\,d\,V}{d\,q} + 2\,V.$$

Quin igitur in his formulis omnes plane curuae algebraicae contineantur dubitari nullo modo poteſt, quando quidem littera V omnes plane functiones impares ipſius q, ſiue rationales, ſiue vtcunque irrationales complectitur.

§ 24. Statuamus, vt exemplum facillimum afferamus, $V = q^n$, denotante n numerum quemcunque imparem, ſiue integrum ſiue fractum, puta $\frac{\mu}{\nu}$; vbi ſcilicet tam μ quam ν debent eſſe functiones impares. Erit igitur

$\frac{dV}{dq} = n q^{n-1}$ et $\frac{ddV}{dq^2} = n(n-1) q^{n-2}$,
vnde coordinatae ita ſe habebunt:

$$x = n(n-1) q^{n-2}(1-qq) + 2nq^n - 2q^n$$
$$= n(n-1) q^{n-2} - (n-1)(n-2) q^n,$$
$$y = n(n-1) q^{n-2} + 2n(n-2) q^{n-1} + (n-1)(n-2) q^n,$$

ac ſi ſumſiſſemus $V = a q^n$, prodiiſſet

$$x = n(n-1) a q^{n-2} - (n-1)(n-2) a q^n \text{ et}$$
$$y = n(n-1) a q^{n-2} + 2n(n-2) a q^{n-1} + (n-1)(n-2) a q^n.$$

§. 25. Hinc igitur patet, ſi poneremus

$$V = a q^m + b q^n + c q^k, \text{ etc.}$$

exponentibus m, n, k exiſtentibus numeris imparibus, tum prodituros fuiſſe hos valores:

$$x = m(m-1) a q^{m-2} - (m-1)(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} - (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} - (k-1)(k-2) c q^k.$$
$$y = m(m-1) a q^{m-2} + 2m(m-2) a q^{m-1} + (m-1)(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} + 2n(n-2) b q^{n-1} + (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} + 2k(k-2) c q^{k-1} + (k-1)(k-2) c q^k.$$

§. 26. Hinc intelligitur ſtatim ac duae pluresue traiectoriae reciprocae fuerint inuentae, ex iis facile infinitas alias deriuari poſſe. Ita ſi fuerint X et Y tales functiones ipſius q, vt traiectoriam reciprocam exhibeant; ſimilique modo etiam inuentae fuerint coordinatae X' et Y', tum vero etiam X'' et Y'', quae ſcilicet omnes referantur ad eandem quantitatem q, ſiue ad eandem quantitatem p, quo-

quoniam eſt $p = \frac{1+q}{1-q}$, id quod euenit quando applicatae ad ſuas curuas ſub eodem angulo inclinantur; tum ex iis noua curua formari poterit, ſumendo

$$x = a\,X + b\,X' + c\,X'' + \text{etc.}$$
$$y = a\,Y + b\,Y' + c\,Y'' + \text{etc.}$$

id quod infinitis modis fieri poterit. Hic autem ſemper aſſumimus, angulum interſectionis eſſe $= 2\alpha$, et applicatas ad abſciſſas ſub pari angulo eſſe inclinatas.

Alia methodus
Formulas generales pro curuis algebraicis eruendi.

§. 27. Quanquam autem formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$, latiſſime patet, atque etiam formulas $\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n}$, quin etiam productum ex ſimilibus formulis, veluti:

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n} \cdot \frac{(R+S)^m}{(R-S)^m} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k} \text{ etc.}$$

in ſe complectitur: tamen dubium oriri poteſt, num hoc etiam locum habeat, ſi exponentes m, n et k fuerint numeri fracti, quoniam tum euolutio fieri nequit niſi per ſeriem infinitam. Methodum igitur adiiciam, qua etiam negotium pro formulis irrationalibus expediri poteſt; quod caſu ſimpliciori ſum oſtenſurus. Sit igitur $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$: vbi ſemper tenendum eſt, abſciſſam x eſſe debere functionem imparem ipſius q, quod quo facilius impetrari poſſit, formulam hoc modo repraeſentemus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{\sqrt{(1-qq)}},$$

 ac

ac ponamus vt ante $dx = dS\surd(1-qq)$ ac $dy = dS(1+q)$ vbi euidens eſt, pro S ſumi debere functionem imparem ipſius q, vt ſcilicet x prodeat functio impar, quoniam $\surd(1-qq)$ tanquam functio par ſpectari poteſt. Adhibita igitur reductione fiet

$$x = S\surd(1-qq) + \int\frac{Sq\,dq}{\surd(1-qq)} \text{ et } y = S(1+q) - \int S\,dq.$$

§. 28. Poſtremae formulae facillime ſatisfit ponendo $S\,dq = dT$, vt fiat $\int S\,dq = T$; ac manifeſtum eſt T eſſe debere functionem parem ipſius q. Quia igitur eſt $S = \frac{dT}{dq}$, erit primo

$$y = \frac{dT}{dq}(1+q) - T \text{ et } x = \frac{dT}{dq}\surd(1-qq) + \int\frac{q\,dT}{\surd(1-qq)};$$

ſicque iam applicata y algebraica eſt facta: pro abſciſſa autem fiet

$$\int\frac{q\,dT}{\surd 1-qq} = \frac{qT}{\surd(1-qq)} - \int\frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

Statuatur igitur $\int\frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} = V$, fietque $T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$;

vbi perſpicuum eſt, pro V ſumi debere functionem imparem ipſius q. Hoc igitur modo abſciſſa x etiam redditur algebraica; erit enim

$$x = \frac{dT}{dq}(1-qq)^{\frac{1}{2}} + \frac{qT}{\surd(1-qq)} - V.$$

§. 29. Ambas igitur expreſſiones pro x et y per per ſolam functionem V exhibeamus; et cum ſit

$$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}, \text{ erit}$$

$$\frac{dT}{dq} = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3q\,dV}{dq}\surd(1-qq),$$

his

his valoribus ſubſtitutis habebimus:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{3qdV}{dq}(1-qq) + \frac{qdV}{dq}(1-qq) - V,$$

ſiue

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2qdV}{dq}(1-qq) - V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq}(1+q)\sqrt{(1-qq)}$$

ſeu

$$y = \frac{ddV}{dq}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - (1+q)(1+2q)\frac{dV}{dq}\sqrt{(1-qq)}.$$

In his ergo formulis quoque infinities infinitae curuae algebraicae continentur, quoniam pro V functiones quaſcunque impares accipere licet.

§. 30. Vt rem exemplo illuſtremus, ſumamus $V = q$, eritque $\frac{dV}{dq} = 1$ et $\frac{ddV}{dq^2} = 0$, vnde fit

$$x = -2q(1-qq) - q = -3q + 2q^3 \text{ et}$$

$$y = -(1+q)(1+2q)\sqrt{(1-qq)}.$$

Ex hoc autem exemplo clarum eſt, hanc ſolutionem ex praecedente nullo modo deduci potuiſſe. Si enim ibi pro V aſſumeretur functio rationalis, tum etiam y prodiret rationalis: ſin autem pro V aſſumeretur functio irrationalis, ambae litterae x et y prodirent irrationales, cum tamen hoc caſu x ſit quantitas rationalis.

§. 31. Nunc igitur certi ſumus facti, priorem ſolutionem, etſi maxime generalis videbatur, tamen non omnes plane ſolutiones in ſe complecti; neque vero haec altera ſolutio pro generaliſſima eſt habenda, quia priorem non in ſe complectitur. Quamobrem adhuc generaliorem

 ſolu-

ſolutionem hic ſubiungamus, quae quantitates irrationales quascunque in ſe comprehendat.

Methodus generalior

traiectorias reciprocas algebraicas inueniendi.

§. 32. Denotet λ fractionem quamcunque, quae quidem ſit rationalis, ſiquidem poteſtates, quarum exponentes ſunt irrationales, non inter quantitates *algebraicas* referri, ſed *interſcendentes* appellari ſolent, ac propoſita ſit haec formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^\lambda}{(1-q)^\lambda}$, quam ſtatim in hanc transformemus $\frac{dy}{dx} = r^\lambda$, ſtatuendo ſcil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, eritque propterea $y = \int r^\lambda dx = r^\lambda x - \int r^{\lambda - 1} x dr$, quam ergo poſtremam formulam integrabilem reddi oportet, ita tamen, vt x fiat impar ipſius q.

§. 33. Hunc in finem ſtatuamus $\int r^{\lambda - 1} x dr = T r^\lambda$, ſicque fiet $y = r^\lambda (x - \lambda T)$; ac vero facta differentiatione $r^{\lambda - 1} x dr = r^\lambda dT r^{\lambda - 1} dr$, vnde colligitur

$$x = \frac{r\,dT}{dr} + \lambda T, \text{ ideoque } y = \frac{r^{\lambda + 1} dT}{dr}.$$

Hoc modo iam ambae coordinatae x et y redditae ſunt algebraicae, ac problema foret ſolutum, ſi modo conſtaret, qualem functionem pro T accipi conueniat: eam autem ita comparatam eſſe oportet, vt inde prodeat $x =$ functioni pari ipſius q.

§. 34.

§. 34. Reſtituamus ergo loco r valorem aſſumtum $\frac{1+q}{1-q}$, ex quo erit $lr = l(1+q) - l(1-q)$, ideoque

$$\frac{dr}{r} = \frac{dq}{1+q} + \frac{dq}{1-q} = \frac{2dq}{1-qq} \text{ et } \frac{r}{dr} = \frac{1-qq}{2dq},$$

vnde fit

$$x = \left(\frac{1-qq}{2dq}\right) dT + \lambda T \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} \left(\frac{1-qq}{2dq}\right) dT.$$

Vbi cum x per duo membra exprimatur, notetur, ſi alterum fuerit functio par ipſius q, alterum fore functionem imparem. Unde patet loco T neque functionem parem neque imparem accipi poſſe, ſed quantitatem ex duabus partibus conſtari debere, quarum altera ſit functio par, altera impar.

§. 35. Statuamus $T = R + S$, vbi R denotet functionem parem, S vero imparem; et nunc habebimus

$$x = \frac{dR(1-qq)}{2dq} + \frac{dS(1-qq)}{2dq} + \lambda R + \lambda S,$$

quarum quatuor partium prima et quarta eſt impar, ſecunda vero ac tertia par; vnde partes ſecundam et tertiam nihilo aequari oportet, vt fiat

$$x = \frac{dR(1-qq)}{2dq} + \lambda S.$$

At vero poſito

$$\frac{dS(1-qq)}{2dq} + \lambda R = 0$$

ſponte fit $R = -\frac{dS(1-qq)}{2\lambda dq}$, ideoque functio par, vti requiritur; vnde cum ſumto elemento dq conſtante ſit

$$dR = -\frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{qdS}{\lambda}, \text{ erit}$$

$$x = -\frac{ddS(1-qq)^2}{4\lambda dq^2} + \frac{qdS(1-qq)}{2\lambda dq} + \lambda S,$$

et

et quia eſt $T = R + S$, erit

$$d\,T = d\,R + d\,S = - \frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{dS(q+\lambda)}{\lambda},$$

quam ob rem habebimus

$$y = -\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{(1-qq)^2}{4\lambda dq^2}\, d\,d\,S - \tfrac{dS(q+\lambda)(1-qq)}{2\lambda dq}\right).$$

Dummodo ergo pro S capiatur functio impar ipſius q, hae formulae ſemper praebebunt traiectoriam reciprocam algebraicam.

§. 36. Hae autem formulae pluribus modis transformari poſſunt, dum ſcilicet loco S aliae functiones impares accipiuntur. Sumatur igitur $S = \frac{cV}{1-qq}$, exiſtente V functione impari, eritque

$$d\,S = \frac{cdV}{1-qq} + \frac{2cVqdq}{(1-qq)^2} \text{ et}$$

$$d\,d\,S = \frac{cddV}{1-qq} + \frac{4cqdqdV}{(1-qq)^2} + \frac{2cVdq^2}{(1-qq)^2} + \frac{8cVqqdq^2}{(1-qq)^3}$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperietur

$$x = - \frac{cddV(1-qq)}{4\lambda dq^2} - \frac{cqdV}{2\lambda dq} + \frac{cV(2\lambda\lambda-1-qq)}{2\lambda(1-qq)} \text{ et}$$

$$y = -\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\tfrac{c(1-qq)}{4\lambda dq^2}\, d\,d\,V - \tfrac{c(\lambda-q)}{2\lambda dq}\, d\,V + \tfrac{c(qq-2\lambda q+1)}{2\lambda(1-qq)}\, V\right).$$

§. 37. Operae igitur pretium erit hinc caſum deducere quo $\lambda = 1$, quandoquidem haec ſolutio conuenire debet cum ea, quam ſupra (§. 23.) dedimus. Facto autem $\lambda = 1$ fiet

$$x = - \frac{cddV(1-qq)}{4dq^2} - \frac{cqdV}{2dq} + \frac{cV}{2} \text{ et}$$

$$y = -\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)\left(\tfrac{c(1-qq)ddV}{4dq^2} - \tfrac{c(1-q)dV}{2dq} + \tfrac{cV(q-1)^2}{2(1-qq)}\right) \text{ ſiue}$$

$$y = - \frac{cddV(1+q)^2}{4dq^2} + \frac{cdV(1+q)}{2dq} - \frac{cV}{2},$$

quam-

quamobrem ſi ſumamus $c = -4$, reſultant hae formulae:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2q\,dV}{dq} - 2V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1+q)}{dq} + 2V$$

quae cum ſupra datis perfecte congruunt.

§. 38. Quo has formulas commodiores reddamus, faciamus $c = -4\lambda$, et ſumta pro V functione quacunque impari ipſius q, coordinatae traiectoriae ita ſatis ſuccincte exprimentur:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq) + \frac{2dV}{dq}\cdot q - \frac{2V(2\lambda\lambda-1-qq)}{1-qq} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left(\frac{ddV}{dq^2}(1-qq) - \frac{2dV}{dq}(\lambda-q) + \frac{2V(qq-2\lambda q+1)}{1-qq}\right).$$

Quin etiam formulis primo inuentis commodius vti licebit, ſi per -4λ multiplicentur. Ita denotante S functione quacunque impari ipſius q, coordinatae erunt:

$$x = \frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}q(1-qq) - 4\lambda\lambda S \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right).$$

§. 39. Quaecunque igitur functio idonea pro S accipiatur, ſemper fieri oportet $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$. Quod quomodo eueniat, et quemadmodum littera S penitus e calculo egrediatur, perſcrutari operae pretium erit. Differentiemus igitur primo valorem ipſius x, vt obtineamus

$$dx = \frac{d^3S}{dq^2}(1-qq) - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq).$$

Deinde quia y exprimitur producto, cuius prior factor eſt $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = r^\lambda$, poſito ſcil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, erit $d.\,r^\lambda = \lambda\,r^\lambda.\,\frac{dr}{r}$. Supra autem vidimus eſſe $\frac{dr}{r} = \frac{2dq}{1-qq}$, vnde pro hoc factore habebimus

$$d.\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \frac{dq}{1-qq},$$

quo notato nanciſcimur

$$dy = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \frac{dq}{1-qq}\left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right)$$
$$+\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2ddS}{dq}(3q+\lambda)(1-qq)\right.$$
$$\left. - 2dS(1-2\lambda q-3qq)\right]$$

quae duae partes contractae praebent

$$dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddSq(1-qq)}{dq} - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq)\right]$$

vnde manifeſto fit $dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda dx$, vti conditio praeſcripta poſtulat.

§. 40. Hic igitur caſus omni attentione dignus ſe offert formulae huius differentialis tertii gradus:

$$\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq),$$

quae non ſolum ipſa per ſe eſt integrabilis, quandoquidem eius integrale dat valorem ipſius x, ſed etiam per formulam $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$ multiplicata etiamnunc manet integrabilis, ſiquidem eius integrale praebet valorem ipſius y; vnde quaeſtio maximi momenti in analyſi naſcitur: *Quomodo formulae differentiales cuiuscunque gradus comparatae eſſe debeant, vt non ſolum ipſae ſint integrabiles, ſed etiam quando per quampiam functionem datam multiplicantur*; cuius quidem quaeſtionis ſolutio per methodum ante adhibitam eſt facillima.

§. 41. Vt has formulas exemplo ſimpliciſſimo illuſtremus, ſumamus $S = q$ et coordinatae noſtrae traiectoriae erunt

$$x = -2(1+2\lambda\lambda)q + 2q^3 \text{ et}$$

$y =$

$$y = -2\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}(q+\lambda)(1-qq),$$

ſiue per -2 diuidendo erit

$$x = (1+2\lambda\lambda)q - q^3 \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}(q+\lambda)(1-qq).$$

Facile autem apparet, quaecunque fractio pro exponente λ accipiatur, eliminationem quantitatis q ad aequationem altiſſimi gradus perducere. Sin autem ſumatur $\lambda = 0$, manifeſto prodit $x = q - q^3$ et $y = q(1-qq)$, ideoque $y = x$; quae eſt aequatio pro linea recta; quod autem non ſolum hoc caſu valet, ſed etiam formulae generales poſito $\lambda = 0$ ſemper praebent $y = x$. Methodus igitur hoc articulo tradita omnes plane traiectorias algebraicas in ſe continere eſt cenſenda, quatenus ſcilicet pro λ fractionem quamcunque accipere licet.

Singularis conſtructio

traiectoriarum reciprocarum, ope rectificationis curuarum.

§. 42. Conſtituto axe conuerſionis A B, circa quem traiectoria conuerſa et iuxta directionem axis promota ſe ipſam vbique ſub dato angulo $= 2\alpha$ interſecet, ipſi in puncto quocunque A iungatur recta E F ad angulum E A B $= 2\alpha$ inclinata, in qua capiantur abſciſſae A P $= x$, quibus reſpondeant applicatae axi parallelae P M $= y$; ac poſito $dy = p\,dx$, vidimus, totum negotium huc redire, vt fiat p functio reciproca abſciſſae x. Viciſſim igitur abſciſſa x talis eſſe debet functio ipſius p, vt, ſi loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, valor ipſius x euadat ſui negatiuus, ſeu abeat in $-x$; cuiusmodi functiones facile innumeras excogitare licet, qua- Tab. I. Fig. 6.

 rum

rum ſimpliciſſima eſt talis: $x = \frac{a(pp-1)}{p}$, quippe quae formula, ſi loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, fit $\frac{a(1-pp)}{p} = -x$.

§. 43. Haec autem formula generalior reddi poteſt introducendo nouam variabilem t, quae ſit functio quaecunque impar ipſius x. Tum enim ſi ſtatuatur $t = \frac{a(pp-1)}{p}$, quoniam, ſi loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, quantitas t abit in $-t$, etiam abſciſſa x abit in $-x$. Quo notato ponamus pro noſtro inſtituto $t = \frac{pp-1}{2p}$, vnde fit $p = t + \sqrt{(tt+1)}$. Quia igitur eſt $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dy = t\,dx + dx\sqrt{(tt+1)}$ ideoque $y = \int t\,dx \int dx\sqrt{(tt+1)}$. Hic autem euidens eſt, ſi denotet $\int t\,dx$ applicatam curuae obthogonalem abſciſſae x reſpondentem, tum $\int dx\sqrt{(tt+1)}$ exprimere arcum eiusdem curuae.

§. 44. Sit igitur F T C t F talis curua ſuper recta E F per coordinatas orthogonales P T deſcripta, cuius ergo punctum C immineat initio abſciſſarum A, atque abſciſſae A P $= x$ reſpondeat applicata orthogonalis P T $= \int t\,dx$, eritque arcus C T $= \int dx\sqrt{(tt+1)}$; quocirca pro traiectoria hinc conſtruenda tantum capi debet eius applicata obliquangula P M $= y =$ P T + C T, et punctum M erit in traiectoria, ſi modo t fuerit functio impar ipſius x. Vnde patet, hanc nouam curuam E T C t F non penitus arbitrio noſtro relinquere. Quomodo autem ea debeat eſſe comparata haud difficulter definietur.

§. 45. Quoniam enim t eſt functio impar ipſius x, euidens eſt, formulam integralem $\int t\,dx$ fore functionem

parem

parem ipſius x; ita vt in eadem curua abſciſſae negatiuae $AP = -x$ reſpondeat applicata $pt = PT$ pariter in eandem plagam directa. Vnde patet, curuam hanc $ETCtF$ ita comparatam eſſe debere, vt recta AC eius ſit diameter orthogonalis, eiusque portiones CTE et CtF inter ſe ſint perfecte aequales et ſimiles. Quo obſeruato omnes plane curuae huius indolis ad noſtrum inſtitutum erunt accommodatae. Ex quolibet enim huiusmodi curua traiectoria pro quouis interſectionis angulo $= 2\alpha$ facillime conſtrui poterit: dummodo obſeruetur, ſi arcus CT pro poſitiuo habeatur, ita vt capiatur $PM = PT + CT$, tum arcus ad alteram partem cadentes Ct pro negatiuis eſſe habendos, ita vt ibi applicata traiectoriae pm ſumi debeat $= pt - Ct$. Atque haec eſt conſtructio illa elegantiſſima, quam olim Celeberr. *Ioannes Bernoullius* primus inuenerat.

§. 46. Huius conſtructionis ope etiam eiusmodi traiectoriae deſcribi poſſunt, quae pluribus axibus conuerſionis, atque adeo pro eodem interſectionis angulo ſunt praeditae. Tantum enim opus eſt pro curua FCF eiusmodi figuram accipi, quae plures habeat diametros AC, $A'C'$; ac; etc. ac huiusmodi curua eſt cyclois: eique innumerabiles aliae ſimiles exhiberi poſſunt. Tum enim, ſi modo deſcripto ex tali curua traiectoria conſtruatur, eius non ſolum recta AB, ſed etiam omnes rectae $A'B'$, ab, quarum quidem numerus eſt infinitus, pariter erunt axes conuerſionis. Tab. I. Fig. 7.

De aliis formulis, ex quibus pariter innumeras traiectorias reciprocas elicere licet.

§. 47. Ex praecedente conſtructione manifeſtum eſt, ſi curua in ſubſidium vocata E C F non ſolum fuerit algebraica, ſed etiam rectificationem admittat; tum traiectorias inde deſcriptas quoque fore algebraicas. At vero formula principalis, vnde has conſtructiones deduximus, quae erat $x = \frac{a(pp-1)}{p}$ ita tractari poteſt, vt etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibeat.

§. 48. Cum enim etiam talis formula generalior $x = \frac{a(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}}$ pariter praeſcripta proprietate ſit praedita, vt, poſito $\frac{1}{p}$ loco p, abſciſſa x abeat in ſui negatiuum, quoniam eſt

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp, \text{ erit}$$

$$y = px - a\int \frac{dp(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}} = px - \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda},$$

quae expreſſio etiam eſt algebraica, dum ne ſit vel $\lambda = 1$ vel $\lambda = -1$, quippe quibus caſibus integratio inuolueret logarithmos.

§. 49. Sumto igitur pro λ numero quocunque, exceptis caſibus $\lambda = \pm 1$, conſtructio traiectoriae ita ſe habebit, vt ſumta abſciſſa $x = ap^{\lambda} - ap^{-\lambda}$ fiat applicata

$$y = \frac{\lambda}{\lambda+1}ap^{\lambda+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}ap^{1-\lambda}.$$

Neque

Neque vero hinc difficile erit variabilem p eliminare, vt obtineatur aequatio algebraica inter x et y. Poſito enim commodi ergo $a = \frac{b}{2}$, vt fiat $p^{2\lambda} = \frac{2xp^\lambda}{b} + 1$, inde fit

$p^\lambda = \frac{x \pm \surd(xx + bb)}{b}$, ideoque

$$p = \left(\frac{x \pm \sqrt{xx + bb}}{b}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Vbi, ſi loco $\frac{1}{\lambda}$ ſcribatur n et loco p iſte valor ſubſtituatur, eaedem prodeunt formulae ſupra (§. 8.) erutae.

§. 50. Non ſolum autem abſciſſa x vnicae tali formulae $\frac{a(p^{2\lambda} - 1)}{p^\lambda}$ aequalis poni poteſt, ſed etiam pluribus talibus formulis ſimul ſumtis: veluti

$$x = a(p^\lambda - p^{-\lambda}) + b(p^\mu - p^{-\mu}) + c(p^\nu - p^{-\nu}) \text{ etc.}$$

Perſpicuum enim eſt, ſi in hac expreſſione loco p ſcribatur $\frac{1}{p}$, loco x proditurum eſſe $-x$. Hinc autem colligetur

$$\int x\,dp = \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{bp^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{cp^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{cp^{1-\nu}}{1-\nu}.$$

Et cum ſit $y = px - \int x\,dp$, erit ſimili modo vt ſupra eſt factum

$$y = \frac{\lambda a}{\lambda+1}p^{\lambda+1} + \frac{\lambda a}{1-\lambda}p^{1-\lambda} + \frac{\mu a}{\mu+1}p^{\mu+1} + \frac{\mu a}{1-\mu}p^{1-\mu} + \frac{\nu c}{\nu+1}p^{\nu+1} + \frac{\nu a}{1-\nu}p^{1-\nu}.$$

Atque has formulas pro lubitu multiplicare licebit, ex iisque quouis caſu ſatis commode traiectoriae deſcribi poterunt, dum pro quouis valore litterae p tributo valores vtriusque coordinatae x et y computari poſſunt. At vero multo

multo difficilius erit, ipſam litteram p ex calculo elidere, vt pateat, ad quemnam ordinem linearum curua ſit referenda.

§. 51. Quin etiam has formulas adhuc generaliores reddere licet. Si enim litterae i, m, n denotent numeros impares, poni poterit

$$x = a\,(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} + b\,(p^{\mu} - p^{-\mu})^{m} + c\,(p^{\nu} - p^{-\nu})^{n}.$$

Manifeſtum enim eſt, ſingula haec membra, dum loco p ſcribitur $\frac{1}{p}$, in valores negatiuos conuerti, propterea quod exponentes i, m, n ſunt impares. Tum vero quia hic exponentes ſupponuntur numeri integri, ſi ſingula membra euoluantur, integrale formulae $\int x\,dp$ facile exhiberi poterit, id quod pro vnico membro oſtendiſſe ſufficiet. Cum enim ſit

$$(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} = p^{i\lambda} - \frac{i}{1} p^{(i-2)\lambda} + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} p^{(i-4)\lambda} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{(i-6)\lambda} \text{ etc.}$$

erit

$$\int x\,dp = \frac{a}{i\lambda+1} p^{i\lambda+1} - \frac{i\,a}{1\,(i-2)\lambda+1} p^{(i-2)\lambda+1} + \frac{i(i-1)\,a}{1 \cdot 2\,(i-4)\lambda+1} p^{(i-4)\lambda+1}.$$

Hincque cum ſit $y = p\,x - \int x\,dp$, deſcriptio curuae in promptu erit, id quod etiam perinde ſe habet, ſi plura huiusmodi membra fuerint accepta.

§. 52. Atque hoc modo fere omnia ſatis ſuccincte ſumus complexi, quae olim circa traiectorias reciprocas fuſius reperiuntur expoſita et inuenta. Methodus autem, qua hic vſus ſum, tam plana et aequabilis videtur, vt maior ſimplicitas deſiderari nequeat. Vbi imprimis notari

tari meretur, quod omnes ſolutiones, quas dedimus, ad omnes plane traiectorias tam rectangulas quam obliquangulas aequo ſucceſſu applicari poſſint. Praeterea vero formulae generales pro curuis algebraicis hic prorſus de nouo adiectae ſunt cenſendae: cum illo quidem tempore, quo hoc argumentum eſt tractatum, nemo de talibus formulis generalibus cogitauerit. Quamobrem neminem poenituiſſe confido, qui hoc argumentum, nunc fere penitus oblitum, denuo perluſtrauerit.

DE MIRIS PROPRIETATIBVS
CVRVAE ELASTICAE

ſub aequatione $y = \int \frac{xx\,dx}{\surd(1 - x^4)}$ contentae.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab II. Fig. 1. Sit E G F lamina elaſtica, quae ope funiculi terminis E et F alligati incuruetur in curuam elaſticam E G F, tum vero, ſi funiculus eo vsque conſtringatur, donec anguli in E et F fiant recti, ea curua elaſtica oritur, quae vocari ſolet rectangula et in aequatione contenta $y = \int \frac{xx\,dx}{\surd(1 - x^4)}$, cuius nonnullas proprietates prorſus ſingulares et admirandas hic ſum commemoraturus.

Fig. 2. §. 2. Sit igitur C A C′ talis curua elaſtica, rectae C C′, quae funiculum refert, vtrinque normaliter inſiſtens, et euidens eſt rectam A D, ad punctum medium D inter vtrumque terminum C et C′ perpendiculariter ductam, fore curuae diametrum, et punctum A eius quaſi verticem referre. Tum vero ſi ex C ad rectam C C′ erigatur perpendiculum C B, quod tanquam axem hic ſpectabimus, in eoque capiamus abſciſſam $CP = x$ et vocemus applicatam $PM = y$, poſita altitudine $AD = AB = 1$, erit, vti

vti conſtat, $d y = \frac{x x d x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$; vnde ſi arcus curuae C M ponatur $= s$, fiet $d s = \frac{d x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$; atque tam ex natura rei quam ex hac aequatione intelligere licet totam hanc curvam conſtare ex infinitis portionibus C A C', C' A' C'', C'' A'' C''', etc inter ſe ſimilibus et aequalibus ſuper recta C C''' vtrinque in infinitum producta conſtitutus, vnde etiam tota haec curua infinitos habebit diametros A D, A' D', A'' D'', etc. totidemque vertices A, A', A'', A''', etc. tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum. Puncta autem C, C', C'', C''', etc, quoniam circa eorum ſingula curva ſimiliter alternatim protenditur, centra vocari poterunt. Quemadmodum autem ſingularum harum portionum altitudines A D, A' D', A'' D'', etc. vnitate deſignamus, ponamus ſemilatitudinem cuiusque portionis $C D = A B = a$; ipſos vero arcus $C A = C' A = C' A' =$ etc. $= c$, et quomodo hae binae quantitates a et c ſe ad vnitatem ſeu altitudinem A D habeant deinceps accuratius inueſtigabimus.

§. 3. His de quantitatibus ad hanc curuam pertinentibus notatis quantitates variabiles $P M = y$ et $C M = s$, ad abſciſſam $C P = x$ referamus, vnde ſtatim patet, tam y quam s fore functiones infinitiformes eiusdem abſciſſae $C P = x$. Cum enim applicata P M vtrinque in infinitum producta curuam ſecet in infinitis punctis M, M', M'', M''', etc. applicata y infinitos recipiet valores, ſcilicet P M, P M', P M'', P M''', P M'''', etc qui ex principali $P M = y$ et quantitate conſtante $A B = C D = a$ erunt $P M = y$;

$$P M' = 2 a - y;\ P M'' = 4 a + y;\ P M''' = 6 a - y;$$
$$P M'''' = 8 a + y;\ P M''''' = 10 a - y;$$

E 2 qui

qui omnes valores in his generalibus formis continentur:

$$4ia+y \text{ et } (4i+2)a-y,$$

vbi littera i omnes numeros integros tam poſitiuos quam negatiuos denotare poteſt. Simili modo eidem abſciſſae $CP = x$ reſpondebunt infiniti arcus curuae, qui erunt

$$CM = s;\ CAM' = 2c - s;\ CAA'M'' = 4c + s;$$
$$CAA'A''M''' = 6c - s;$$

qui omnes etiam in his geminis formulis continentur:

$$4ic + s,\ (4i+2)c - s$$

ſumendo pro i ſucceſſiue omnes numeros tam poſitiuos quam negatiuos.

Tab II. Fig. 3. §. 4. Sufficiet igitur ſolam huius curuae portionem CMA conſideraſſe, quoniam reliquae omnes ei ſunt aequales, pro qua poſuimus $CB = AD = 1$, $AB = CD = a$, et arcum $CMA = c$. Tum vero pro puncto indefinito M ſi vocentur coordinatae $CP = x$, $PM = y$ et arcus $CM = s$ erit

$$dy = \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \text{ et } ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

His poſitis ad curuam in M ducamus normalem MN baſi CD productae occurrentem in N. Hinc ſi ducatur ad baſin perpendiculum $MQ = x$, ob $CQ = y$ erit interuallum $QN = \frac{x\,dx}{dy} = \frac{\sqrt{(1-x^4)}}{x}$ et ipſa normalis $MN = \frac{x\,ds}{dy} = \frac{1}{x}$, ita vt rectangulum $MQ \cdot MN$ ſit $= 1 = AD^2$. Hinc ſi vocetur angulus $CNM = \Phi$, qui metitur amplitudinem arcus CM, erit $\text{ſin.}\,\Phi = xx$,

$$\text{coſ.}\,\Phi = \sqrt{(1-x^4)} \text{ et } \text{tang.}\,\Phi = \frac{xx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

§. 5.

§. 5. Quaeramus nunc etiam radium osculi curvae in puncto M, qui ſit M O, hunc in finem faciamus $\frac{dy}{dx} = p = \frac{xx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, vnde fit $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, hinc porro fiat $\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}} = xx = q$, eritque vti conſtat radius osculi $= \frac{dx}{dq} = \frac{1}{2x}$; ſicque erit $MO = \frac{1}{2x}$, ideoque $MO = \frac{1}{2} MN$, ita vt centrum curuaturae cadat in punctum medium normalis M N; ex quo patet radium osculi M O reciproce eſſe proportionalem interuallo $MQ = x$, quae eſt proprietas, quam natura elaſticae poſtulat. Cum enim vis laminam in puncto C tendens directionem habeat M N, eius momentum reſpectu puncti M erit vi multiplicatae per $QM = x$ aequale, cui per naturam elaſticitatis radius oſculi in M reciproce debet eſſe proportionalis. Manifeſtum igitur eſt radium osculi in ipſo puncto C eſſe infinitum; in altero autem termino $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} AD$: ſicque in hoc puncto A curuatura erit maxima.

§. 6. Nunc etiam videamus, quomodo ex data abſciſſa $CP = x$ tam applicata $PM = y$, quam ipſe arcus $CM = s$ proxime per ſeries infinitas exprimi queat, id quod duplici modo praeſtari poteſt. Prior maxime obvius in eo conſiſtit vt formula $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}} = (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem reſoluatur, quae erit:

$$1 + \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} x^8 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} x^{12} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} x^{16} + \text{etc.}$$

vnde per integrationem colligitur:

$$PM = y = \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{7} x^7 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{11} x^{11} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{15} x^{15} \text{ etc.}$$

tum vero etiam arcus:

$$CM = s = x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} x^9 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{13} x^{13} + \text{etc.}$$

E 3 Hinc

Hinc igitur patet, ſi abſciſſa x fuerit valde parua, tum fore proxime $y = \frac{1}{3}x^3$ et $s = x$. Verum ſi capiamus $x = 1$, per ſeries ambae quantitates a et c ita exprimentur, vt ſit

$$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

$$c = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

Hae autem ſeries nimis lente conuergunt, quam vt inde valores litterarum a et c ſatis exacte definiri queant.

§. 7. Alter modus non adeo obuius in eo conſiſtit, vt ſtatuatur

$$y = \int \frac{x\,x\,d\,x}{\sqrt{(1 - x^4)}} = u\sqrt{(1 - x^4)},$$

ſumtis igitur differentialibus erit

$$x\,x\,d\,x = d\,u\,(1 - x^4) - 2\,u\,x^3\,d\,x, \text{ ſiue}$$

$$\frac{d\,u}{d\,x}(1 - x^4) - 2\,u\,x^3 - x\,x = 0.$$

Fingatur nunc iſta ſeries:

$$u = \alpha\,x^3 + \beta\,x^7 + \gamma\,x^{11} + \delta\,x^{15} + \varepsilon\,x^{19} + \text{etc.}$$

quandoquidem iam nouimus, ſi x fuerit valde paruum, fieri debere $y = \frac{1}{3}x^3$, ideoque etiam $u = \frac{1}{3}x^3$; deinde ex forma aequationis manifeſtum eſt, in ſerie exponentes ipſius x continuo quaternario creſcere debere. Hac igitur ſerie ſubſtituta fiat ſequens euolutio:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,u}{d\,x} &= 3\,\alpha\,x\,x + 7\,\beta\,x^6 + 11\,\gamma\,x^{10} + 15\,\delta\,x^{14} + 19\,\varepsilon\,x^{18} + \text{etc.}\\
-\frac{x^4\,d\,u}{d\,x} &= \qquad\quad - 3\,\alpha\,x^6 - 7\,\beta\,x^{10} - 11\,\gamma\,x^{14} - 15\,\delta\,x^{18} - \text{etc.}\\
-2\,u\,x^3 &= \qquad\quad - 2\,\alpha\,x^6 - 2\,\beta\,x^{10} - 2\,\gamma\,x^{14} - 2\,\delta\,x^{18} - \text{etc.}\\
-x\,x &= -x\,x
\end{aligned}$$

Singulis igitur membris ad nihilum redactis fiet

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\ \beta = \tfrac{1.5}{3.7};\ \gamma = \tfrac{1.5.9}{3.7.11};\ \delta = \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15};\ \text{etc.}$$

quamobrem habebimus:

$$y = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1.5}{3.7}x^7 + \tfrac{1.5.9}{3.7.11}x^{11} + \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15}x^{15} + \text{etc.}\right)\sqrt{(1-x^4)}.$$

§. 8. Simili modo ſi ſtatuamus

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = v\sqrt{(1-x^4)},$$

peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{dv}{dx}(1-x^4) - 2vx^3 - 1 = 0,$$

vbi iam ſtatuamus

$$v = \alpha x + \beta x^5 + \gamma x^9 + \delta x^{13} + \varepsilon x^{17} + \zeta x^{21} + \text{etc.}$$

cuius euolutio ita repraeſentetur:

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{dv}{dx} = \alpha & + 5\beta x^4 & + 9\gamma x^8 & + 13\delta x^{12} & + 17\varepsilon x^{16} & + \text{etc.} \\
-\frac{x^4 dv}{dx} = & -\alpha & -5\beta & -9\gamma & -13\delta & -\text{etc.} \\
-2vx^3 = & -2\alpha & -2\beta & -2\gamma & -2\delta & -\text{etc.} \\
-1 = -1 & & & & &
\end{array}$$

Hinc reperiuntur coefficientes

$$\alpha = 1;\ \beta = \tfrac{3}{5};\ \gamma = \tfrac{3.7}{5.9};\ \delta = \tfrac{3.7.11}{5.9.13};\ \varepsilon = \tfrac{3.7.11.15}{5.9.13.17}\ \text{etc.}$$

vnde colligitur ſore

$$s = \left(x + \tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{3.7}{5.9}x^9 + \tfrac{3.7.11}{5.9.13}x^{13} + \text{etc.}\right)\sqrt{(1-x^4)}.$$

His autem ſeriebus plane ad valores litterarum a et c eruendos vti non licet: facto enim $x = 1$ formula $\sqrt{(1-x^4)}$ euaneſcit; tum autem ipſae ſeries in infinitum excreſcunt.

§. 9. Pro litteris autem a et c cognoſcendis alias adhiberi conueniet methodos inde petendas, quod integralia harum formularum: $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, pro eo tantum

tum caſu quaeruntur, quo poſt integrationem ſit $x = 1$. Hunc in finem formula $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ ita repraeſentetur:

$\frac{(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - xx)}}$ et numerator $(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}$ in ſeriem convertatur, quae erit

$$1 - \frac{1}{2} xx + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} x^8 - \text{etc.}$$

ita vt loco $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ ſcripturi ſimus hanc ſeriem:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}} \left(1 - \frac{1}{2} xx + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} x^8 - \text{etc.}\right)$$

quo facto tam pro y quam pro s ſequentes formulae integrandae occurrent:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}, \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}}, \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}}, \text{ etc.}$$

§. 10. Harum autem formularum integralia hic non in genere requiruntur, ſed tantum pro caſu quo poſt integrationem ponitur $x = 1$. Hoc autem caſu novimus, ſi $1 : \pi$ denotet rationem diametri ad peripheriam, eſſe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2}, \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2},$$

et ita porro, quibus valoribus ſubſtitutis primo ex formula

$$y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \int \frac{xx\,dx\,(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

colligimus fore

$$a = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7}{8} + \text{etc.}\right)$$

ex altera autem formula $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, colligitur longitudo totius arcus

C A =

$$CA = c = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2} - \text{etc}\right)$$

Verum etiam hae ſeries non ſatis ſunt aptae pro veris valoribus quantitatum a et c cognoſcendis.

§. 11. Supereſt autem adhuc alia methodus eosdem valores per producta ex infinitis factoribus exprimendi, cuius rationem, quamquam a me iam dudum fuſius eſt explicata, hic ſequenti modo ſuccincte exponam. Conſideretur haec formula: $z = x^n \surd(1 - x^4)$ et cum ſit

$$dz = n x^{n-1} \surd(1-x^4) - \frac{2x^{n+3}\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n x^{n-1}\,dx - (n+2) x^{n+3}\,dx}{\surd(1-x^4)},$$

hinc viciſſim integrando erit

$$x^n \surd(1 - x^4) = n\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\surd(1-x^4)} - (n+2)\int \frac{x^{n+3}\,dx}{\surd(1-x^4)},$$

quare ſi haec integralia tantum deſiderentur pro caſu $x=1$, fiet

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n+2}{n}\int \frac{x^{n+3}\,dx}{\surd(1-x^4)}.$$

Simili modo erit

$$\int \frac{x^{n+3}\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n+6}{n+4}\int \frac{x^{n+7}\,dx}{\surd(1-x^4)} \quad \text{et}$$

$$\int \frac{x^{n+7}\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n+10}{n+8}\int \frac{x^{n+11}\,dx}{\surd(1-x^4)} \quad \text{etc.}$$

Quod ſi ergo hoc modo in infinitum aſcendamus, erit

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\surd(1-x^4)} = \frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+6}{n+4}\cdot\frac{n+10}{n+8}\cdot\frac{n+14}{n+12}\cdot\cdot\cdot\cdot\int \frac{x^{n+\infty}\,dx}{\surd(1-x^4)}.$$

§. 12. Subſtituamus nunc ſucceſſiue pro n numeros 1, 2, 3, 4, ac prodibunt ſequentes quatuor reductiones ad producta infinita, caſu ſcilicet $x = 1$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{19}{17} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{1+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = c.$$

$$\text{II. } \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{16}{14} \cdot \frac{20}{18} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{2+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{III. } \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{11} \cdot \frac{17}{15} \cdot \frac{21}{19} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{3+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = a.$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{22}{20} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{4+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2}.$$

§. 13. Hic iam probe notandum eſt poſtremas formulas integrales inter ſe omnes eſſe aequales. Cum enim in genere ſit

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+2}{n} \int \frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

ſumto $n = \infty$ erit

$$\int \frac{x^{\infty-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{x^{\infty+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

Quod ſi ergo harum quatuor formularum quamlibet per aliam diuidamus, poſtremi factores integrales ſe mutuo tollunt eritque

$$\frac{\text{I}}{\text{II}} = \frac{4c}{\pi} = \frac{2\cdot3}{1\cdot4} \cdot \frac{6\cdot7}{5\cdot8} \cdot \frac{10\cdot11}{9\cdot12} \cdot \frac{14\cdot15}{13\cdot16} \cdot \frac{18\cdot19}{17\cdot20} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\text{I}}{\text{III}} = \frac{c}{a} = \frac{3\cdot3}{1\cdot5} \cdot \frac{7\cdot7}{5\cdot9} \cdot \frac{11\cdot11}{9\cdot13} \cdot \frac{15\cdot15}{13\cdot17} \cdot \frac{19\cdot19}{17\cdot21} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\text{I}}{\text{IV}} = 2c = \frac{3\cdot4}{1\cdot6} \cdot \frac{7\cdot8}{5\cdot10} \cdot \frac{11\cdot12}{9\cdot14} \cdot \frac{15\cdot16}{13\cdot18} \cdot \frac{19\cdot20}{17\cdot22} \cdot \text{etc.}$$

II

$$\frac{\text{II}}{\text{III.}} = \frac{\pi}{4a} = \frac{3\cdot4}{2\cdot5}\cdot\frac{7\cdot8}{6\cdot9}\cdot\frac{11\cdot12}{10\cdot13}\cdot\frac{15\cdot16}{14\cdot17}\cdot\frac{19\cdot20}{18\cdot21}\cdot\text{ etc.}$$

$$\frac{\text{II}}{\text{IV.}} = \frac{\pi}{2} = \frac{4\cdot4}{2\cdot6}\cdot\frac{8\cdot8}{6\cdot10}\cdot\frac{12\cdot12}{10\cdot14}\cdot\frac{16\cdot16}{14\cdot18}\cdot\frac{20\cdot20}{18\cdot22}\cdot\text{ etc.}$$

$$\frac{\text{III}}{\text{IV.}} = 2a = \frac{4\cdot5}{3\cdot6}\cdot\frac{8\cdot9}{7\cdot10}\cdot\frac{12\cdot13}{11\cdot14}\cdot\frac{16\cdot17}{15\cdot18}\cdot\frac{20\cdot21}{19\cdot22}\cdot\text{ etc.}$$

§. 14. Hae iam expreſſiones multo ſunt aptiores ad veros valores litterarum a et c proxime definiendos. Pro valore autem ipſius c inueniendo formula $\frac{\text{I}}{\text{II.}}$ maxime videtur idonea, unde fit

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{1\cdot3}{2\cdot1}\cdot\frac{3\cdot7}{4\cdot5}\cdot\frac{5\cdot11}{6\cdot9}\cdot\frac{7\cdot15}{8\cdot13}\cdot\frac{9\cdot19}{10\cdot17}\text{ etc. ſiue}$$

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{55}{54}\cdot\frac{105}{104}\cdot\frac{171}{170}\cdot\text{ etc.}$$

quae pro faciliori calculo ita poteſt exhiberi:

$$\frac{4c}{\pi} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{54}\right)\left(1+\frac{1}{104}\right)\left(1+\frac{1}{170}\right)\text{ etc.}$$

At vero quantitas a commodiſſime definietur ſiue ex hac forma:

$$\frac{\pi}{4a} = \frac{2\cdot3}{1\cdot5}\cdot\frac{4\cdot7}{3\cdot9}\cdot\frac{6\cdot11}{5\cdot13}\cdot\frac{8\cdot15}{7\cdot17}\cdot\frac{10\cdot19}{9\cdot21}\cdot\text{ etc. ſiue}$$

$$\frac{\pi}{4a} = \frac{6}{5}\cdot\frac{28}{27}\cdot\frac{66}{65}\cdot\frac{120}{119}\cdot\frac{190}{189}\cdot\text{ etc.}$$

quae commodi ergo ita repraeſentetur:

$$\frac{\pi}{4a} = \left(1+\frac{1}{1\cdot5}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot9}\right)\left(1+\frac{1}{5\cdot13}\right)\left(1+\frac{1}{7\cdot17}\right)\left(1+\frac{1}{9\cdot21}\right)\text{ etc.}$$

vel etiam pari ſucceſſu definietur quantitas a ex formula $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$, quae dat

$$2a = \frac{2\cdot5}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot9}{5\cdot7}\cdot\frac{6\cdot13}{7\cdot11}\cdot\frac{8\cdot17}{9\cdot15}\cdot\frac{10\cdot21}{11\cdot19}\text{ etc. ſiue}$$

$$2a = \frac{10}{9}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{78}{77}\cdot\frac{136}{135}\cdot\frac{210}{209}\cdot\text{ etc. ſiue}$$

$$2a = \left(1+\frac{1}{3\cdot3}\right)\left(1+\frac{1}{5\cdot7}\right)\left(1+\frac{1}{7\cdot11}\right)\left(1+\frac{1}{9\cdot15}\right)\left(1+\frac{1}{11\cdot19}\right)\text{ etc.}$$

Interim tamen ſatis taedioſo calculo opus foret, ſi valores harum litterarum vsque ad partem millioneſimam

 vnita-

vnitatis iuſtas exquirere vellemus: verum infra, cum proprietates magis abſconditas huius curuae detexerimus, ſatis prompte hos valores exhibere licebit.

§. 15. At vero pro eodem ſcopo ſeries pro *a* et *c* ſupra §. 10. inuentae optimo cum ſucceſſu vſurpari poſſunt, quanquam ipſi termini parum decreſcunt, propterea quod in iſtis ſeriebus ſigna + et − alternantur. Hinc enim inſigne ſubſidium naſcitur ad ſummas harum ſeriérum proxime inueniendas. Si enim habeatur huiusmodi ſeries:

$$A - A' + A'' - A''' + A'''' - A''''' \text{ etc.}$$

cuius termini A, A', A'', A''' continuo fiant minores, tum inde formetur ſeries differentiarum

$$A - A' = B,\ A' - A'' = B',\ A'' - A''' = B'' \text{ etc.}$$

hincque porro ſeries differentiarum ſecundarum

$$B - B' = C,\ B' - B'' = C',\ B'' - B''' = C'' \text{ etc.}$$

ſicque hoc modo continuo differentiae capiantur, tum ſumma ſeriei propoſitae ſemper erit

$$\tfrac{A}{2} + \tfrac{B}{4} + \tfrac{C}{8} + \tfrac{D}{16} + \tfrac{E}{32} + \text{ etc.}$$

§. 16. Quo nunc hanc regulam ad ſeries §. 10. applicemus, euoluamus in fractionibus decimalibus ſingulos terminos qui ibi occurrunt.

$\frac{1}{2}$	$= 0,500000$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8}$	$= 0,085450$
$\frac{1^2}{2^2}$	$= 0,250000$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}$	$= 0,074769$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4}$	$= 0,187500$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9}{10}$	$= 0,067292$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}$	$= 0,140625$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}$	$= 0,060563$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6}$	$= 0,117188$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11}{12}$	$= 0,055516$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}$	$= 0,097657$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}$	$= 0,050890$

$\frac{1^2}{2^2}\cdot$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}\cdot\frac{13}{14}\;\cdots\cdots = 0,047255$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{13^2}{14^2}\;\cdots\cdots = 0,043880$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{13^2}{14^2}\cdot\frac{15}{16}\;\cdots\cdots = 0,041138$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{15^2}{16^2}\;\cdots\cdots = 0,038567$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{15^2}{16^2}\cdot\frac{17}{18}\;\cdots\cdots = 0,036424$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{17^2}{18^2}\;\cdots\cdots = 0,034400$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{17^2}{18^2}\cdot\frac{19}{20}\;\cdots = 0,032700$$

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\;\cdots\cdots\;\frac{19^2}{20^2}\;\cdot = 0,031065$$

§. 17. His praeparatis calculum inſtituamus pro valore litterae c inueniendo, et cum eſſet

$$\frac{2c}{\pi} = 1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \text{etc.}$$

binis primis terminis ad ſiniſtram translatis erit

$$\frac{2c}{\pi} - \frac{3}{4} = \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\;\text{etc.}$$

Nunc ſinguli huius ſeriei termini ſibi inuicem ſubſcribantur usque ſubiungantur ſeries differentiarum litteris B, C, D etc. inſignitarum hoc modo:

A	B	C	D
0, 140625	0, 042968	0, 020080	0, 011398
0, 097657	0, 022888	0, 008682	0, 004149
0, 074769	0, 014206	0, 004533	0, 001870
0, 060563	0, 009673	0, 002663	0, 000966
0, 050890	0, 007010	0, 001697	0, 000551
0, 043880	0, 005313	0, 001146	0, 000314
0, 038567	0, 004167	0, 000832	
0, 034400	0, 003335		
0, 031065			

E	F	G	H
0, 007249	0, 004970	0, 003595	0, 002709
0, 002279	0, 001375	0, 000886	0, 000575
0, 000904	0, 000489	0, 000311	
0, 000415	0, 000178		
0, 000237			

§. 18. Hinc igitur ſumma noſtrae ſeriei ſequenti modo colligetur:

$\frac{1}{2}A =$	0, 070312		0, 084503
$\frac{1}{4}B =$	0, 010742	$\frac{1}{64}F =$	0, 000078
$\frac{1}{8}C =$	0, 002510	$\frac{1}{128}G =$	0, 000028
$\frac{1}{16}D =$	0, 000712	$\frac{1}{256}H =$	0, 000011
$\frac{1}{32}E =$	0, 000227	pro reliquis	000007
	0, 084503		0, 084627
		adde $\frac{3}{4} =$	0, 750000
		erit $\frac{2c}{\pi} =$	0, 834627

Hinc ergo erit $c = \pi . 0, 417314 = 1, 311031$.

§. 19. Simili modo computabitur interuallum AB $= CD = a$. Erat autem

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7}{8} + \text{etc.}$$

vbi bini primi termini

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0, 312500$$

dant ad alteram partem translati

$$\frac{2a}{\pi} - 0, 312500 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7}{8} + \text{etc.}$$

vnde calculus ſequenti modo expediatur:

A

A	B	C	D
0, 117188	0, 031738	0, 013580	0, 007198
0, 085450	0, 018158	0, 006382	0, 002867
0, 067292	0, 011776	0, 003515	0, 001371
0, 055516	0, 008261	0, 002144	0, 000741
0, 047255	0, 00611-	0, 001403	0, 000413
0, 041138	0, 004714	0, 000990	
0, 036424	0, 003724		
0, 032700			

E	F	G	H
0, 004331	0, 002835	0, 001969	0, 001405
0, 001496	0, 000866	0, 000564	
0, 000630	0, 000302		
0, 000328			

§. 20. Hinc igitur ſeriei ſumma colligitur

$\frac{1}{2}$ A $=$ 0, 058594
$\frac{1}{4}$ B $=$ 0, 007934
$\frac{1}{8}$ C $=$ 0, 001697
$\frac{1}{16}$ D $=$ 0, 000450
$\frac{1}{32}$ E $=$ 0, 000135
0, 068810

0, 068810
$\frac{1}{64}$ F $=$ 0, 000044
$\frac{1}{128}$ G $=$ 0, 000015
$\frac{1}{256}$ H $=$ 0, 000005
0, 068874
adde $\frac{5}{16} =$ 0, 312500
et prodit $\frac{2a}{\pi} =$ 0, 381374

hinc ergo $a = \pi . 0,190687 = 0,599061$.

§. 20. His valoribus quantitatum a et c proxime veris inuentis, quos autem deinceps adhuc accuratius definire docebo, progredior ad illas proprietates huius curuae magis

magis abſtruſas, quas ſum pollicitus demonſtrandas, quippe quas per ſolitas calculi operationes vix ac ne vix quidem eruere licet, et quae propterea profundioris indaginis merito ſunt cenſendae. Ac primo quidem hic eam inſignem relationem, quae inter ternas principales dimenſiones huius curuae, ſcilicet altitudinem $BC = AD$, et inter latitudinem $AB = CD$ atque ipſam curuae longitudinem AMC intercedit, et quam iam pridem detexi, hic accuratius exponam, et ſequenti Theoremate complectar.

Theorema I.

§. 21. In curua elaſtica rectangula AMC, cuius vertex eſt A et centrum alternationis C, ternae dimenſiones principales, quae ſunt: 1) altitudo $BC = AD$; 2) latitudo $AB = CD$; ac 3) longitudo arcus AMC, ita a ſe inuicem pendent, vt rectangulum ex latitudine AB in longitudinem arcus AMC aequale ſit areae circuli circa diametrum altitudinis BC deſcripti, ſiue poſitis vt fecimus $BC = AD = 1$, $AB = CD = a$ et arcu $AMC = c$ erit $AC = \frac{\pi}{4}$.

Demonſtratio.

§. 22. Inſignis iſta proprietas deducitur ex formulis quas ſupra per producta in infinitum excurrentia expreſſimus (§. 13.) quarum prima dabat

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2.3}{1.4}\cdot\frac{6.7}{5.8}\cdot\frac{10.11}{9.12}\cdot\frac{14.15}{13.16} \text{ etc vltima vero}$$

$$2a = \frac{4.5}{3.6}\cdot\frac{8.9}{7.10}\cdot\frac{12.13}{11.14}\cdot\frac{16.17}{15.18} \text{ etc.}$$

Quod ſi iam in priore expreſſione primus factor ſimplex $\frac{2}{1}$ ſeorſim exhibeatur, ex reliquis autem ſequentibus bini inter

inter ſe combinentur habebitur:

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{11.14}{12.13} \cdot \frac{15.18}{16.17} \cdot \text{etc.}$$

Quod ſi ergo haec expreſſio per alteram multiplicetur, omnes factores praeter primum manifeſto ſe mutuo tollunt, ita vt proditurum ſit $\frac{8ac}{\pi} = 2$, vnde fit $ac = \frac{\pi}{4}$, quae eſt ipſa illa proprietas quam demonſtrare oportebat.

§. 23. Etſi haec veritas modo prorſus ſingulari ex contemplatione infiniti eſt concluſa: tamen deinceps obſeruaui, eandem quoque per operationes calculi magis conſuetas elici poſſe. Quaeramus enim in genere pro quouis curuae puncto indefinito M productum ex applicata $PM = y$ et arcu $CM = s$, ſitque hoc productum $P = ys$, erit $dP = y\,ds + s\,dy$, hincque iterum integrando

$$P = \int y\,ds + \int s\,dy,$$

quas ambas formulas ſeorſim euoluamus. Pro priori initio oſtendimus eſſe

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1.1}{2.7}x^7 + \frac{1.3.1}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.15}x^{15} + \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, per ſingulos terminos ita integretur, vt poſt integrationem ſtatuatur $x = 1$, quippe in quo verſatur caſus noſtri theorematis.

§. 24 Pro hac autem inueſtigatione habebimus

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - x^4)} = \frac{1}{2},$$

poſito $x = 1$; tum vero in genere vidimus eſſe (§. 11.)

$$\int \frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \frac{n}{n+2}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}},$$

vnde deducimus

$$\int \frac{x^7\, dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{11}\, dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \tfrac{8}{10} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{15}\, dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \tfrac{12}{14} \cdot \tfrac{8}{10} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Hinc igitur pro noſtro caſu, quo $x = 1$, erit

$$\int y\, ds = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{11} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{15} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{1}{19} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{2}, \text{ etc.}$$

quae ſeries reducitur ad ſequentem formam:

$$\int y\, ds = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3.7} + \tfrac{1}{5.11} + \tfrac{1}{7.15} + \tfrac{1}{9.19} + \text{etc.}\right).$$

Eodem modo euoluatur altera formula $\int s\, dy$, et cum per ſeriem priorem eſſet

$$s = x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} x^9 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{13} x^{13} + \text{etc.}$$

at vero $dy = \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, ſingulis terminis integrandis ope formularum ante datarum pro caſu $x = 1$ reperietur

$$\int s\, dy = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{13} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{1}{2},$$

quae ſeries contrahitur in ſequentam formam:

$$\int s\, dy = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3.5} + \tfrac{1}{5.9} + \tfrac{1}{7.13} + \tfrac{1}{9.17} + \tfrac{1}{11.21} + \text{etc.}\right.$$

His igitur duabus ſeriebus coniunctis fiet:

$$P = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3.5} + \tfrac{1}{3.7} + \tfrac{1}{5.9} + \tfrac{1}{5.11} + \tfrac{1}{7.13} + \text{etc.}\right).$$

§. 25. Quod ſi in hac ſerie bini termini ſe inſequentes in vnum contrahantur, obtinebitur ſequens ſeries:

$$P = ys = \tfrac{2}{1.3} + \tfrac{2}{5.7} + \tfrac{2}{9.11} + \tfrac{2}{13.15} + \tfrac{2}{17.19} + \text{etc.}$$

Quoniam autem porro eſt $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5.7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, $\frac{2}{9.11} = \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, etc. iſta ſeries reſoluitur in hanc formam:

P = 2

$$P = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{etc.}$$

quae cum ſit notiſſima ſeries *Leibniziana* cuius ſumma $= \frac{\pi}{4}$, erit $P = ys = \frac{\pi}{4}$, caſu ſcilicet quo $x = 1$. Verum hoc caſu aſſumſi fieri $y = a$ et $s = c$, ſicque etiam hinc apparet eſſe productum $ac = \frac{\pi}{4}$.

Praeparatio
ad ſequentes huius curuae proprietates magis abſtruſas.

§. 26. In diſſertatione, cui titulus: *Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali* $\int \frac{Z\,dz}{\surd(1+mzz+nz^4)}$ *contentarum*, quaeque Parti poſteriori Actorum pro anno 1751 inſerta fuit, oſtendi: ſi $\Pi : z$ denotet valorem huius formulae integralis: $\int \frac{dz(\alpha+\beta zz)}{\surd(1+mzz+nz^4)}$, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $z = 0$, tum plures huius generis quantitates tranſcendentes modo prorſus ſingulari inter ſe comparari poſſe. Scilicet ſi propoſitae fuerint duae huiusmodi formulae: $\Pi : x$ et $\Pi : y$, atque ex litteris x et y ita determinetur tertia z, vt ſit

$$z = \frac{x\surd(1+myy+ny^4)}{1-nxxyy} + \frac{y\surd(1+mxx+nx^4)}{1-nxxyy},$$

vnde fit

$$\surd(1+mzz+nz^4) = \frac{(mxy+\surd(1+mxx+nx^4)(1+myy+ny^4))(1+nxxyy)+2nxy(xx+yy)}{(1-nxxyy)^2},$$

tum ſemper erit

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta xyz,$$

ita vt quantitas tranſcendens $\Pi : z$ ſuperet ſummam datarum $\Pi : x$ et $\Pi : y$ quantitate algebraica βxyz.

§. 27. Euidens iam eſt has formulas generales duplici modo ad inſtitutum noſtrum accommodari poſſe,

 ſcilicet

ſcilicet tam ad arcus huius curuae inter ſe comparandos, quam ad applicatas cuique abſciſſae z reſpondentes. Pro vtroque caſu autem erit $m = 0$ et $n = -1$, tum vero in numeratore pro arcubus ſumi debebit $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, at pro applicatis $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

§. 28. Quod ſi iam littera z denotet abſciſſam quamcunque in axe C B aſſumtam, applicatam ei reſpondentem deſignemus charactere $\Pi : z$, arcum vero reſpondentem hoc charactere $\Theta : z$, eritque ex natura noſtrae elaſticae

$$\Pi : z = \int \frac{z z d z}{\sqrt{(1 - z^4)}} \text{ et } \Theta z = \int \frac{d z}{\sqrt{(1 - z^4)}},$$

quibus characteribus in ſequentibus vtemur. Tum igitur ſumto $z = 0$ erit $\Pi : 0 = 0$ et $\Theta : 0 = 0$. Sumto autem $z = 1$ erit $\Pi : 1 = A B = a$ et $\Theta : 1 = C A = c$. Praeterea vero notari oportet, ſumta abſciſſa z negatiua, tam applicatam quam arcus longitudinem etiam fore negatiuas; ſicque erit $\Pi : (-z) = -\Pi : z$, ſimilique modo $\Theta : (-z) = -\Theta : z$. His igitur praemiſſis duplicem iſtam comparationem in ſequentibus Problematibus ad noſtrum inſtitutum accommodabimus.

Problema I.

Tab II. Fig 4 *Propoſitis in noſtra curua elaſtica binis arcubus* C X *et* C Y, *abſcindere arcum* C Z, *qui aequalis ſit ſummae arcuum* C X + C Y.

Solutio.

§. 29. Vocentur abſciſſae his arcubus reſpondentes $C x = x$, $C y = y$ et $C z = z$, eruntque applicatae ſtabi-

ſtabilito ſignandi modo $xX = \Pi : x$, $yY = \Pi : y$ et $zZ = \Pi : z$, ipſi vero arcus $CX = \Theta : x$, $CY = \Theta : y$ et $CZ = \Theta : z$, et quoniam requiritur vt ſit $\Theta : z = \Theta : x + \Theta : y$, regula generalis ſupra allata, quoniam hoc caſu littera $\beta = 0$, pro datis litteris x et y ita definire iubet z, vt ſit

$$z = \frac{x\sqrt{(1 - y^4)} + y\sqrt{(1 - x^4)}}{1 + xxyy},$$

tum autem erit

$$\sqrt{(1 - z^4)} = \frac{(1 - xxyy)\sqrt{(1 - x^4)(1 - y^4)} - 2xy(xx + yy)}{(1 + xxyy)^2};$$

vnde patet, quomodo ex binis abſciſſis datis $Cx = x$ et $Cy = y$ quaeſitam z conſtrui oporteat, vt arcus CZ aequalis fiat ſummae arcuum $CX + CY$.

§. 30. Quemadmodum hic ex datis abſciſſis x et y determinauimus abſciſſam z, ita viciſſim, ſi dentur abſciſſae x et z, tertia y ex iis ſimili modo determinabitur. Cum enim hic eſſe debeat $\Theta : y = \Theta : z - \Theta : x$, euidens eſt hic y eodem modo per z et $-x$ definiri, quo ante z per $+x$ et $+y$ expreſſimus. Hinc igitur erit

$$y = \frac{z\sqrt{(1 - x^4)} - x\sqrt{(1 - z^4)}}{1 + xxzz} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1 - y^4)} = \frac{(1 - xxzz)\sqrt{(1 - x^4)(1 - z^4)} + 2xz(xx + zz)}{(1 + xxzz)^2}.$$

Parique modo ex datis y et z abſciſſa x ita determinabitur, vt ſit

$$x = \frac{z\sqrt{(1 - y^4)} - y\sqrt{(1 - z^4)}}{1 + yyzz} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1 - x^4)} = \frac{(1 - yyzz)\sqrt{(1 - y^4)(1 - z^4)} + 2yz(yy + zz)}{(1 + yyzz)^2}.$$

§. 31. Hinc igitur patet ternas quantitates x, y et z ita inter ſe referri, vt quaelibet per binas reliquas ſimili fere modo determinetur; quamobrem iſtam relationem

 nem

nem accuratius euoluamus, quo clarius pateat, quomodo a ſe inuicem pendeant. Ex primis autem valoribus, ſumtis quadratis erit

$$zz = \frac{(xx + yy)(1 - xxyy) + 2xy\sqrt{(1 - x^4)(1 - y^4)}}{(1 + xxyy)^2};$$

ex valore autem formulae $\sqrt{(1 - z^4)}$ colligitur:

$$\sqrt{(1 - x^4)(1 - y^4)} = \frac{(1 + xxyy)^2 \sqrt{(1 - z^4)} + 2xy(xx + yy)}{1 - xxyy},$$

qui valor ſi ibi ſubſtituatur, orietur haec aequatio:

$$zz(1 - xxyy) = xx + yy + 2xy\sqrt{(1 - z^4)}.$$

Similique modo ex binis reliquis determinationibus fiet

$$yy(1 - xxzz) = zz + xx - 2xz\sqrt{(1 - y^4)} \text{ et}$$
$$xx(1 - yyzz) = yy + zz - 2yz\sqrt{(1 - x^4)}.$$

§. 32. Quod ſi has aequationes ab omni irrationalitate liberemus, ex ſingulis eadem reſultabit aequatio rationalis, quae erit

$$\left.\begin{array}{l} + x^4 - 2xxyy + 2x^4yyzz + x^4y^4z^4 \\ + y^4 - 2xxzz + 2xxy^4zz \\ + z^4 - 2yyzz + 2xxyyz^4 \end{array}\right\} = 0,$$

quaeque etiam ita exhiberi poteſt:

$$0 = \left\{\begin{array}{l} x^4 + y^4 + z^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2yyzz \\ \quad + 2xxyyzz(xx + yy + zz) + x^4y^4z^4 \end{array}\right\},$$

vbi iam manifeſto ternae litterae x, y et z aequaliter ingrediuntur; quoniam enim hic litterarum x, y, z tantum quadrata inſunt, perinde eſt ſiue eae negatiue capiantur, ſiue poſitiuae.

§. 33.

§. 33. Quoties ergo ternae abſciſſae $Cx = x$, $Cy = y$ et $Cz = z$, eam inter ſe tenent rationem, quam aſſignauimus, tum arcus C Z ſemper aequabitur ſummae binorum reliquorum C X et C Y. Cum igitur hinc ſit $CZ - CY = CX$, erit arcus $YZ = CX$, vnde ſi puncta Y et Z pro lubitu accipiantur, a puncto C ſemper arcus C X abſcindi poterit, qui arcui Y Z erit aequalis. Ac viciſſim propoſito arcu C X, a puncto quouis dato Y abſcindi poterit arcus Y Z, illi arcui C X aequalis. Sin autem terminus Z vt datus ſpectetur, ab eo retro abſcindi poterit arcus Z Y ipſi C X aequalis, quae cum ſint ſatis obuia, ſuperfluum foret pro iis peculiaria problemata conſtituere.

Theorema II.

§. 34. Si ternae abſciſſae $Cx = x$, $Cy = y$, $Cz = z$, ita fuerint aſſumtae, vt arcus C Z aequetur ſummae C X et C Y, tum ternae applicatae $xX = \Pi : x$, $yY = \Pi : y$, $zZ = \Pi : z$ ita inter ſe erunt relatae, vt ſit

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + xyz,$$

ſiue erit

$$zZ = xX + yY + \frac{Cx \cdot Cy \cdot Cz}{CB^2}.$$

Demonſtratio.

§. 35. Cum relatio inter formulas $\Pi : x$, $\Pi : y$ et $\Pi : z$ eandem relationem inter abſciſſas x, y et z praebeat quam pro formulis $\Theta : x$, $\Theta : y$ et $\Theta : z$ aſſignauimus, quoniam pro hoc caſu littera β in forma generali adhibita vnitati aequatur, vi relationis generalis erit

$\Pi : z$

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + x\,y\,z,$$

vnde, ad homogeneitatem obſeruandam, quia altitudo C B vnitate eſt definita, ſolidum $x\,y\,z$ per eius quadratum diuidi oportet, vnde fiet

$$z\,Z = x\,X + y\,Y + \frac{Cx \,.\, Cy \,.\, Cz}{CB^2}.$$

§. 36. Cum igitur characteres $\Theta : z$ et $\Pi : z$ certas functiones tranſcendentes abſciſſae z denotent, quas conſtat neque per logarithmos neque per arcus circulares exprimi poſſe, quandoquidem per formulas integrales $\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^4)}}$ et $\int \frac{z\,z\,dz}{\sqrt{(1 - z^4)}}$ definiuntur, earum valores ſaltem per ſeries infinitas exhibuiſſe iuuabit: erit autem per modum priorem

$$\Theta : z = z + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} z^9 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{13} z^{13} + \text{etc.}$$

$$\Pi : z = \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{7} z^7 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{11} z^{11} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{15} z^{15} + \text{etc.}$$

Ex altera autem reſolutione erit ex §. 8.

$$\Theta : z = \left(z + \tfrac{3}{5} z^5 + \tfrac{3.7}{5.9} z^9 + \tfrac{3.7.11}{5.9.13} z^{13} + \text{etc.}\right) \sqrt{(1 - z^4)} \text{ et}$$

$$\Pi : z = \left(\tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1.5}{3.7} z^7 + \tfrac{1.5.9}{3.7.11} z^{11} + \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15} z^{15} + \text{etc.}\right) \sqrt{(1 - z^4.)}$$

Problema

Elementa principalia noſtrae curuae elaſticae, ſcilicet latitudinem A B $= a$ *et totum arcum* C A $= c$, *reſpectu altitudinis* C B $= 1$, *accuratius determinare quam ſupra fieri licuit*

Solutio

§. 37. Hunc in finem accipiatur punctum Z in ipſo vertice curuae A, vt fiat $z = 1$, eritque

$$\Pi : z = AB = a \text{ et } \Theta : z = CA = c,$$

tum

tum igitur erit $\sqrt{(1-z^4)} = 0$. Nunc quaerantur bini arcus CX et CY, quorum ſumma ſit aequalis arcui $CA = c$. Poſitis ergo eorum abſciſſis $Cx = x$ et $Cy = y$ ex §. 31. erit

$$1 - xx - yy - xxyy = 0,$$

vnde fit $yy = \frac{1-xx}{1+xx}$. Quod ſi igitur y hoc modo per x determinetur, tum erit $\Theta : x + \Theta : y = c$; tum vero ob $\Pi : z = a$ erit $a = \Pi : x + \Pi : y + xy$.

§. 38. Quo nunc ſeries pro $\Theta : x$ et $\Theta : y$, item pro $\Pi : x$ et $\Pi : y$, maxime conuergentes reddantur, abſciſſas x et y proxime inter ſe aequales accipiamus. Si enim vellemus ſtatuere $y = x$, prodiret

$$x = y = \sqrt{(-1 + \sqrt{2})},$$

qui valor irrationalis minime idoneus foret ad noſtras ſeries euoluendas. Hanc ob rem ſumamus $xx = \frac{1}{2}$, erit $yy = \frac{1}{3}$, ideoque $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vnde per priores ſeries fiet

$$\Theta : x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \tfrac{1}{2.5}\cdot\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1.3}{2.4.9}\cdot\tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6.13}\cdot\tfrac{1}{2^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\Pi : x = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7}\cdot\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1.3}{2.4.11}\cdot\tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6.15}\cdot\tfrac{1}{2^6} + \text{etc.}\right)$$

Simili vero modo erunt:

$$\Theta : y = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \tfrac{1}{2.5}\cdot\tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1.3}{2.4.9}\cdot\tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6.13}\cdot\tfrac{1}{3^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\Pi : y = \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2.7}\cdot\tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1.3}{2.4.11}\cdot\tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6.15}\cdot\tfrac{1}{3^6} + \text{etc.}\right)$$

§. 39. Hae ſeries manifeſto tantopere conuergunt, vt, qui laborem calculi ſuſcipere voluerit, veros litterarum

a et c valores tam exacte definire queat quam lubuerit; valores autem quas ſupra aſſignauimus, iam tam parum a veritate diſcrepant, vt pro noſtro inſtituto abunde ſufficere poſſint; quandoquidem hic de eo tantum agitur, vt valores inuenti calculum ſubducendo comprobari queant, quamobrem ad alias inſignes proprietates huius curuae progrediamur.

Problema III.

Tab. II. Fig. 5. *Propoſito in curua elaſtica arcu quocunque* P Q, *a puncto dato* R *abſcindere arcum* R S, *qui illi arcui* P Q *ſit aequalis.*

Solutio.

§. 40. Quoniam igitur in curua quatuor puncta P, Q, R, S conſideranda veniunt, ſint abſciſſae illis reſpondentes $Cp = p$, $Cq = q$, $Cr = r$, $Cs = s$, pro quibus ponamus breuitatis gratia formulas irrationales

$$\surd(1-p^4) = P,\quad \surd(1-q^4) = Q,\quad \surd(1-r^4) = R \text{ et } \surd(1-s^4) = S.$$

His poſitis, quoniam arcus R S aequalis eſſe debet arcui P Q, requiritur vt ſit C S − C R = C Q − C P, hoc eſt $\Theta : s - \Theta : r = \Theta : q - \Theta : p$, cui aequationi vt per regulam ſupra datam ſatisfaciamus, quaeramus arcum $\Theta : v$, vt ſit $\Theta : v = \Theta : q - \Theta : p$, et ſecundum praecepta ſuperiora eſſe debet $v = \frac{qP - pQ}{1 + ppqq}$, vnde fit

$$\surd(1 - v^4) = V = \frac{(1 - ppqq)PQ + 2pq(pp + qq)}{(1 + ppqq)^2}.$$

Hoc iam arcu inuento eſſe debet $\Pi : s = \Pi : r + \Pi : v$; quare per eadem praecepta fiet $s = \frac{rV + vR}{1 + rrvv}$, hincque porro

$$S = \frac{(1 - rrvv)RV - 2rv(rr + vv)}{(1 + rrvv)^2}.$$

Sub-

Subſtituamus nunc in his formulis valores pro v et V inventos; ac primo erit

$$1 + rrvv = \frac{(1+ppqq)^2 + rrppQQ + rrqqPP - 2rrpqPQ}{(1+ppqq)^2},$$

quae aequatio, ſi loco P P et Q Q valores ſubſtituantur, ad hanc reducitur:

$$1 + rrvv = \frac{(1+ppqq)^2 + rr(pp+qq)(1-ppqq) - 2pqrrPQ}{(1+ppqq)^2}.$$

At vero pro numeratore erit

$$rV + vR = \frac{r(1-ppqq)PQ - 2pqr(pp+qq) + (qPR - pQR)(1+ppqq)}{(1+ppqq)^2},$$

conſequenter abſciſſa quaeſita C S $= s$ ita erit expreſſa:

$$s = \frac{r(1-ppqq)PQ + 2pqr(pp+qq) + (qPR - pQR)(1+ppqq)}{(1+ppqq)^2 + rr(pp+qq)(1-ppqq) - 2pqrrPQ}.$$

Quod autem ad valorem litterae S attinet, quia eo in noſtro calculo non indigemus, eius euolutione ſuperſedemus.

§. 41. Hinc igitur videmus, quomodo abſciſſa s per ternas abſciſſas datas p, q et r exprimatur; vbi quidem plurimum abeſt, vt litterae p, q, r in eam aequaliter ingrediantur: cum tamen ex aequatione propoſita

$$\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p$$

intelligatur, iſtas litteras P, Q et R ſimili modo in valorem ipſius s ingredi debere, ſi modo littera p negatiue acciperetur. Neque igitur vllum eſt dubium, quin forma inuenta ita transformari poſſit, vt iſta paritas litterarum p, q et r eluceſcat, id quod tamen neutiquam liquet.

§. 42. Cum autem eſſe debeat

$$\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p,$$

cui-

euidens eſt, manente littera p binas reliquas q et r inter ſe commutari poſſe, vnde etiam vera eſſe debet iſta expreſſio:

$$s = \frac{q(1-pprr)PR + 2pqr(pp+rr) + (rPQ - pQR)(1+pprr)}{(1+pprr)^2 + qq(pp+rr)(1-pprr) - 2prqPR}.$$

Deinde manente r litterae p et q ita permutari poterunt, ſi loco q ſcribatur $-p$ et $-q$ loco p, tum autem erit

$$s = \frac{-p(1-qqrr)QR + 2pqr(qq+rr) + (qPR + rPQ)(1+qqrr)}{(1+qqrr)^2 + pp(qq+rr)(1-qqrr) + 2qrppQR}.$$

Atque hae tres expreſſiones, quantumuis diuerſae videantur, tamen certe eundem valorem exprimunt.

§. 43. Inſignis igitur hic occurrit quaeſtio analytica, quomodo iſtae tres expreſſiones tractari debeant, vt perfecta permutabilitas inter ternas litteras p, q, r perſpiciatur. Facile quidem intelligitur, ſi tres iſtae expreſſiones in ſe inuicem multiplicentur, ita vt productum aequetur cubo s^3, tum tam in numeratore quam in denominatore ternas litteras p, q, r, pari modo eſſe ingreſſuras; verum tale productum nimis foret perplexum, quam vt vllum vſum habere poſſet.

Solutio.

§. 44. Quae hactenus de curua elaſtica rectangula ſunt tradita etiam ad omnes curuas elaſticas in genere accommodari poterunt. Cum enim pro data abſciſſa z ſit applicata $= \int \frac{dz(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}}$ et ipſe arcus $= \int \frac{dz}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}}$, praecepta generalia ſupra tradita pro comparatione harum quantitatum tranſcendentium ſimili modo applicari poterunt. Interim tamen hic conditio maxime neceſſaria probe

be notari debet, qua poſtulatur vt denominator, qui euolutus eſt $\sqrt{(1-\alpha\alpha-2\alpha\beta zz-\beta\beta z^4)}$, ad hanc formam: $\sqrt{(1+mzz+nz^4)}$, reduci queat, quod manifeſto fieri nequit niſi $1-\alpha\alpha$ fuerit quantitas poſitiua. His igitur caſibus $\alpha\alpha > 1$ omnes comparationes, quas tam inter arcus quam inter applicatas docuimus, ſimili modo ad curvas elaſticas obliquangulas traduci poterunt.

SPECVLATIONES SVPER FORMVLA INTEGRALI $\int \frac{x^n\,dx}{\surd(aa-2bx+cxx)}$.

VBI SIMVL EGREGIAE OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINVAS OCCVRRVNT.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Incipiamus a caſu ſimpliciſſimo, quo $n=0$, et quaeramus integrale formulae $\frac{dx}{\surd aa-2bx+cxx}$, quae poſito $x=\frac{b+z}{c}$ tranſit in hanc: $\frac{dz}{\surd(aacc-bbc+czz)}$, vbi duo caſus diſtingui conuenit, prout c fuerit vel quantitas poſitiua vel negatiua. Sit igitur primo $c=+ff$ et formula noſtra fiet $\frac{dz}{f\surd(aaff-bb+zz)}$, cuius integrale eſt $\frac{1}{f}\,l\,\frac{z+\surd(aaff-bb+zz)}{C}$, ideoque erit noſtrum integrale

$$\frac{1}{\surd c}\,l\,\frac{cx-b+\surd(aac-2bcx+ccxx)}{C},$$

quod ergo, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x=0$, euadet

$$\frac{1}{\surd c}\,l\,\frac{cx-b+\surd c(aa-2bx+cxx)}{-b+a\surd c}.$$

At vero ſi c fuerit quantitas negatiua, puta $c=-gg$, formula differentialis per z expreſſa erit $\frac{dz}{g\surd(aagg+bb-zz)}$

cu-

cuius integrale eſt $\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{(aagg+bb)}}+C$; quare integrale ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x=0$ fiet

$$=\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{cx-b}{\sqrt{(aagg+bb)}}+\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(aagg+bb)}}.$$

§. 2. Denotet nunc Π valorem formulae integralis $\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$ ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x=0$, ſiue c fuerit quantitas poſitiua ſiue negatiua, ac ſi ſit $c=+ff$ erit vti vidimus

$$\Pi=\frac{1}{f}\,l\,\frac{ffx-b+f\sqrt{aa-2bx+ffxx}}{af-b};$$

altero vero caſu, quo $c=-gg$, erit

$$\Pi=-\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{ggx+b}{\sqrt{(aagg+bb)}}+\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(aagg+bb)}},$$

ſiue ambobus arcubus contractis habebimus

$$\Pi=\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{bg\sqrt{(aa-2bx-ggxx)}-abg-ag^3x}{aagg+bb}.$$

Quoniam igitur mox oſtendemus integrationem formulae generalis $\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$ ſemper reduci poſſe ad caſum $n=0$, ſi modo fuerit n numerus integer poſitiuus, omnia haec integralia per iſtum valorem Π exprimi poterunt.

§. 3. Iam poſt integrationem quantitati variabili x eiusmodi valorem conſtantem tribuamus, quo formula irrationalis $\sqrt{(aa-2bx+cxx)}$ ad nihilum redigatur, id quod fit ſi ſumatur $x=\frac{b\pm\sqrt{(bb-aac)}}{c}$, ideoque duobus caſibus. Ponamus pro vtroque caſu functionem Π abire in Δ, ita vt caſu $c=ff$ ſit

$$\Delta=\frac{1}{f}\,l\,\frac{\sqrt{(bb-aaff)}}{af-b}=\frac{1}{f}\,l\sqrt{\frac{b+af}{b-af}},$$

pro altero autem caſu, quo $c=-gg$

$$\Delta=\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{\pm ag\sqrt{(bb+aagg)}}{aagg+bb}=\frac{1}{g}\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{ag}{\sqrt{(bb+aagg)}}.$$

Hos

Hos autem valores Δ in ſequentibus caſibus, quibus ipſa formula radicalis $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ euaneſcit, potiſſimum ſumus contemplaturi.

§. 4. Nunc ad ſequentem caſum progreſſuri, conſideremus formulam $s = \sqrt{(aa - 2bx + cxx)} - a$, vt ſcilicet euaneſcat facto $x = 0$, et quoniam eſt

$$ds = \frac{-bdx + cxdx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}}$$

erit viciſſim integrando

$$c\int \frac{xdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = b\int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} + s$$

vnde colligimus

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{b}{c}\Pi + \frac{\sqrt{(aa - 2bx + xx)} - a}{c},$$

quare ſi poſt integrationem ſtatuamus $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb - aac)}}{c}$ quippe quibus caſibus fit $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$ et $\Pi = \Delta$, fiet

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c}.$$

§. 5. Sumamus porro $s = x\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ fiet $ds = \frac{aadx - 3bxdx + 2cxxdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$, vnde viciſſim integrando colligitur

$$2c\int \frac{xxdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = 3b\int \frac{xdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} - aa\int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} + s$$

vnde ſtatim pro caſu $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$ deducimus

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{(3bb - aac)}{2cc}\Delta - \frac{3ab}{2cc}.$$

§. 6. Iam ad altiores poteſtates aſcenſuri ſtatuamus

mus

mus $s = xx\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$, et quia hinc ſit

$$ds = \frac{2aax\,dx - 5bxx\,dx + 3cx^3\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}},$$ erit

$$3c\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = 5b\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$- 2aa\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + s,$$

hincque porro pro caſu quo poſt integrationem ſtatuitur $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb - xxc)}}{c}$ habebitur

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{5b^3 - 3aabc}{2c^3}\right)\Delta - \frac{15abb}{6c^3} + \frac{2x^4}{3cc}$$
$$= \left(\frac{5b^3}{2c^3} - \frac{3aab}{2cc}\right)\Delta - \frac{5aab}{2c^3} + \frac{2x^5}{3cc}.$$

§. 7. Simili modo ſit $s = x^3\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$, et quia hinc ſit

$$ds = \frac{3aaxx\,dx - 7bx^3\,dx + 4c^4\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$

erit viciſſim integrando

$$4c\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = 7b\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$- 3aa\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + s;$$

tum igitur pro caſu quo ſit $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$, habebimus

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{35b^4}{8c^4} - \frac{15aabb}{4c^3} + \frac{3a^4}{8cc}\right)\Delta - \frac{35ab^3}{8c^4} + \frac{55c^3b}{24c^5}.$$

§. 8. Quo autem ordo in his formulis melius explorari poſſit, ſingulas exhibeamus per factores, quemadmodum ordine oriuntur, ſine vlla abbreuiatione, atque hoc modo formulae integrales inuentae ita repraeſententur:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \Delta$$
$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c}$$

 ∫

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3bb}{1.2cc} - \frac{aa}{1.2c}\right)\Delta - \frac{1.3.ab}{1.2.cc}$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3.5b^3}{1.2.3c^3} - \frac{1.3.3aab}{1.2.3cc}\right)\Delta - \frac{1.3.5abb}{1.2.3c^3} + \frac{1.2.2a^3}{1.2.3cc}$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3.5.7b^4}{1.2.3.4c^4} - \frac{1.3.5.6aabb}{1.2.3.4c^4} + \frac{1.3.3a^4}{1.2.3.4cc}\right)\Delta$$
$$- \frac{1.3.5.7ab^3}{1.2.3.4c^4} + \frac{1.5.11a^3b}{1.2.3.4c^3}.$$

§. 9. Inſtituamus nunc in genere iſtam euolutionem, ſumendo $s = x^n \sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ et quia hinc fit

$$ds = \frac{naax^{n-1}dx - (2n+1)bx^n dx + (n+1)cx^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$

inde viciſſim integrando colligitur

$$(n+1)c\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = (2n+1)b\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$-naa\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + x^n\sqrt{(aa-2bx+cxx)}.$$

Quod ſi vero iam ante elicuerimus

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = M\Delta - \mathfrak{M} \text{ et}$$

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = N\Delta - \mathfrak{N}$$

ita vt hae duae formulae ſint cognitae, ſequens ex iis ita determinabitur, vt ſit

$$\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{(2n+1)bN}{(n+1)c} - \frac{naaM}{(n+1)c}\right)\Delta$$
$$-\frac{(2n+1)b\mathfrak{N}}{(n+1)c} + \frac{naa\mathfrak{M}}{(n+1)c}.$$

Hoc

Hoc igitur modo has integrationes quovsque libuerit continuare licet, dum ex binis quibusque ſequens ope huius regulae formatur, ita vt omnia haec integralia vel a logarithmis vel ab arcubus circularibus pendeant, prouti coefficiens c fuerit vel poſitiuus vel negatiuus. Manifeſtum autem eſt iſtos valores aſſignari non poſſe, niſi exponens n fuerit numerus integer poſitiuus.

§. 10. Ex forma integrali modo inuenta, ſi poſt integrationem ſtatuatur $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb - aac)}}{c}$, vnde fit $s = 0$, erit

$$naa\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = (2n+1)b\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} - (n+1)c\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}},$$

vnde ſi breuitatis gratia ponamus

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = P, \quad \int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = Q,$$

$$\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = R, \quad \int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = S, \text{ etc}$$

hae quantitates P, Q, R, S ita a ſe inuicem pendent vt ſit

$$naaP = (2n+1)bQ - (n+1)cR;$$
$$(n+1)aaQ = (2n+3)bR - (n+2)cS;$$
$$(n+2)aaR = (2n+5)bS - (n+3)cT;$$
$$(n+3)aaS = (2n+7)bT - (n+4)cU;$$
$$(n+4)aaT = (2n+9)bU - (n+5)cW;$$

etc. etc.

Ex his relationibus deducuntur ſequentes determinationes:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(2n+1)b}{naa} - \frac{(n+1)c}{naaQ:R};$$
$$\frac{Q}{R} = \frac{(2n+3)b}{(n+1)aa} - \frac{(n+2)c}{(n+1)aaR:S};$$
$$\frac{R}{S} = \frac{(2n+5)b}{(n+2)aa} - \frac{(n+3)c}{(n+2)aaS:T};$$
$$\frac{S}{T} = \frac{(2n+7)b}{(n+3)aa} - \frac{(n+4)c}{(n+3)aaT:U};$$

etc. etc.

hinc igitur patet, ſingulas has fractiones $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{R}$, $\frac{R}{S}$, etc. per ſequentes ſatis commode determinari.

§. 11. Quod ſi iam in qualibet harum expreſſionum valores modo exhibiti ſucceſſiue ſubſtituantur, pro fractione $\frac{P}{Q}$ impetrabimus fractionem continuam in infinitum progredientem, quae erit

$$naa\frac{P}{Q} = (2n+1)b - \cfrac{(n+1)^2aac}{(2n+3)b - \cfrac{(n+2)^2aac}{(2n+5)b - \cfrac{(n+3)^2aac}{(2n+7)b - \cfrac{(n+4)^2aac}{(2n+9)b - \text{etc.}}}}}$$

ſicque peruenimus ad fractionem continuam ſatis concinnam et ordine perſpicuo progredientem, cuius igitur valor ſemper vel per logarithmos (ſi fuerit $c > 0$), vel per arcus circulares (ſi fuerit $c < 0$) exprimi poteſt.

§. 12. Sumamus nunc $n = 1$ ac fiet

$$P = \int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \Delta \text{ et}$$
$$Q = \int \frac{xdx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c},$$

qui caſus nobis ſuppeditat ſequentem fractionem continuam:

aac

$$\frac{aac\Delta}{b\Delta - a} = 3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cfrac{16aac}{9b - \cfrac{25aac}{11b - \text{etc.}}}}}$$

quae ob elegantiam omni attentione digna eſt cenſenda. Hic autem notaſſe iuuabit, ſi c fuerit numerus negatiuus tum omnes numeratores in hac fractione euadere poſitiuos.

§. 12. Fractio autem haec continua capite quaſi trunca videtur; vnde ſi ſuperne ei adiungitur membrum $b - aac$, ea adhuc concinnior eiusque valor ſimplicior reddetur. Si enim iſta fractio breuitatis gratia deſignetur littera S, ita vt ſit $S = \frac{aac\Delta}{b\Delta - a}$, adiecto iſto membro eius valor erit $b - \frac{aac}{S} = \frac{a}{\Delta}$; ſicque habebimus

$$\frac{a}{\Delta} = b - \cfrac{aac}{3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cfrac{16aac}{9b - \cfrac{25aac}{11b - \text{etc.}}}}}}$$

quae expreſſio eo magis eſt memorabilis, quod nulla adhuc via patet, qua talis fractionis continuae valor a priori inueniri poteſt.

§. 13. Euoluamus nunc ſeorſim binos caſus ſupra memoratos, et quos ſollicite a ſe inuicem diſtingui conuenit.

nit. Sit igitur primo $c = ff$, atque ſupra inuenimus fore

$$\Delta = \frac{1}{f}\, l\, \frac{\sqrt{(bb - aaff)}}{af - b},$$

vbi ſignum radicale ambigue accipi poteſt. Ante omnia igitur neceſſe eſt, vt ſit $bb > aaff$, quia alioquin haec expreſſio euaderet imaginaria; duo ergo caſus ſe offerunt, prouti b fuerit quantitas ſiue poſitiua ſiue negatiua. Priore caſu, quo $b > 0$, atque adeo $b > af$, euidens eſt ſigno radicali tribui debere ſignum $-$, vt fiat

$$\Delta = \frac{1}{f}\, l\, \frac{\sqrt{(bb-aaff)}}{b-af} = \frac{1}{2f}\, l\, \frac{b+af}{b-af},$$

et iam habebimus iſtam ſummationem

$$\cfrac{2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = b - \cfrac{aaff}{3b - \cfrac{4aaff}{5b - \cfrac{9aaff}{7b - \cfrac{16aaff}{9b - \text{etc.}}}}}$$

vnde cum ſit $\frac{b+af}{b-af} > 1$, patet valorem huius expreſſionis fore poſitiuum.

§. 14. Sin autem fuerit b numerus negatiuus, ſiue ſi loco b ſcribatur $-b$, etiamnunc eſſe debet $b > af$; tum autem erit $\Delta = \frac{1}{2f}\, l\, \frac{b-af}{b+af}$, qui ergo logarithmus erit negatiuus, ſiue $\Delta = -\frac{1}{2f}\, l\, \frac{b+af}{b-af}$, vnde obtinebitur ſequens aequatio:

$$\frac{-2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = -b - \cfrac{aaff}{-3b - \cfrac{4aaff}{-5b - \cfrac{9aaff}{-7b - \cfrac{16aaff}{-9b - \text{etc.}}}}}$$

ſiue mutatis ſignis

$$\frac{2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = b + \cfrac{aaff}{-3b + \cfrac{4aaff}{5b + \cfrac{9aaff}{-7b + \cfrac{16aaff}{9b + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo fractionis continuae ſumma aequalis eſt illi, quam in §. praecedente inuenimus. Iſta autem aequalitas harum duarum expreſſionum calculum facienti mox fiet manifeſta.

§. 15. Eodem modo euoluamus caſum quo $c = -gg$, pro quo ſupra inuenimus $\Delta = \frac{1}{g} A$ ſin. $\frac{ag}{\surd(bb+aagg)}$, qui valor per coſinum expreſſus dabit $\Delta = \frac{1}{g} A$ coſ. $\frac{b}{\surd(bb+aagg)}$, vnde patet, per tangentem iſtum valorem adhuc fore ſimpliciorem; fit ſcilicet $\Delta = \frac{1}{g} A$ tang. $\frac{ag}{b}$, quam ob rem pro hoc caſu prodit iſta ſummatio

$$\frac{ag}{A\,\text{tang.}\,\frac{ag}{b}} = b + \cfrac{aagg}{3b + \cfrac{4aagg}{5b + \cfrac{9aagg}{7b + \cfrac{16aagg}{9b + \text{etc.}}}}}$$

vbi nulla amplius limitatione eſt opus.

De fractionibus continuis a logarithmis pendentibus.

§. 16. Perpendamus nunc etiam aliquos caſus ſpeciales, in vtraque forma contentos, et quoniam iam obſeruauimus, binas formas in §§. 13. et 14. inter ſe congruere, vtamur priori, qua erat

$$\frac{2af}{l\,\frac{b+af}{b-af}} = b - \cfrac{aaff}{3b - \cfrac{4aaff}{5b - \cfrac{9aaff}{7b - \text{etc.}}}}$$

ac primo conſideremus caſum, quo $b = af$, quippe quo euadit ſumma fractionis

$$\frac{2af}{l\,\frac{b+af}{b-af}} = 0 = b - \cfrac{bb}{3b - \cfrac{4bb}{5b - \cfrac{9bb}{7b - \text{etc.}}}}$$

quae

quae per reductionem facile mutatur in hanc:

$$0 = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}}}}$$

§. 17. In iſta igitur forma nihilo aequali neceſſe eſt vt denominator primae fractionis ſit $= 1$ ideoque

$$1 = 3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \text{etc.}}} \qquad \text{ſiue} \quad 0 = 2 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \text{etc.}}}$$

Hic igitur ob eandem rationem neceſſe eſt vt prior denominator fiat $= 2$, ita vt

$$2 = 5 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}} \qquad \text{ſiue} \quad 0 = 3 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}}$$

Hic iterum primus denominator debet eſſe $= 3$ ideoque

$$3 = 7 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}} \qquad \text{ſiue} \quad 0 = 4 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}}$$

Denuo igitur primus denominator eſſe debet $= 4$, ita vt $4 = 9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}$ atque hoc modo patet, iſtam relationem eodem ordine in infinitum locum habere, in quo ipſo criterium veritatis huius aequationis eſt ſitum.

§. 18. Quoniam in hac forma numerus b maior eſſe debet quam af, ſtatuamus nunc $b = 2af$, et nanciſcemur ſequentem ſummationem:

$$\frac{2af}{l\,3} = 2af - \cfrac{aaff}{6af - \cfrac{4aaff}{10af - \cfrac{9aaff}{14af - \text{etc.}}}}$$

quae reducitur ad hanc formam mere numericam

$$\frac{2}{l\,3} = 2 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{4}{10 - \cfrac{9}{14 - \cfrac{16}{18 - \text{etc.}}}}}$$

§. 19. Simili modo omnes litterae ex calculo expelli poſſunt, ſi pro b accipiatur multiplum ipſius af. Sit enim in genere $b = naf$, ac prodit

$$\frac{2af}{l\frac{n+1}{n-1}} = naf - \cfrac{aaff}{3naf - \cfrac{4aaff}{5naf - \cfrac{9aaff}{7naf - \text{etc.}}}}$$

quae fractio reducitur ad formam ſequentem:

$$\frac{2}{l\frac{n+1}{n-1}} = n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{4}{5n - \cfrac{9}{7n - \text{etc.}}}}$$

vnde

vnde intelligitur, quemadmodum omnes logarithmos per fractiones continuas exprimi conueniat.

§. 20. Poſſent hic pro n numeri fracti accipi, tum autem priores termini in ſingulis membris prodirent fracti, quas quidem per reductionem ad integros reuocare liceret: verum huiusmodi caſus facillime ex forma generali deriuari poſſunt, ſcribendo ſtatim $b = n$ et $af = m$; tum enim habebimus

$$\frac{2m}{l\frac{n+m}{n-m}} = n - \cfrac{mm}{3n - \cfrac{4mm}{5n - \cfrac{9mm}{7n - \text{etc.}}}}$$

vnde ſi loco m ſcribatur $\sqrt{k}$, erit

$$\frac{2\sqrt{k}}{l\frac{n+\sqrt{k}}{n-\sqrt{k}}} = n - \cfrac{k}{3n - \cfrac{4k}{5n - \cfrac{9k}{7n - \text{etc.}}}}$$

§. 21. Hinc igitur omnium numerorum integrorum logarithmos hyperbolicos per fractiones continuas exprimere poterimus. Propoſitus igitur ſit in genere numerus integer i, ac ſtatuatur $\frac{n+m}{n-m} = i$, erit $\frac{n}{m} = \frac{i+1}{i-1}$. Capiatur ergo $n = i + 1$ et $m = i - 1$, atque habebimus

$$\frac{2(i-1)}{li} = i+1-\cfrac{(i-1)^2}{3(i+1)-\cfrac{4(i-1)^2}{5(i+1)-\cfrac{9(i-1)^2}{7(i+1)-\cfrac{16(i-1)^2}{9(i+1)-\text{etc.}}}}}$$

vnde colligimus

$$li = \cfrac{2(i-1)}{i+1-\cfrac{(i-1)^2}{3(i+1)-\cfrac{4(i-1)^2}{5(i+1)-\cfrac{9(i-1)^2}{\text{etc.}}}}}$$

§. 22. Si huiusmodi fractiones deſideremus pro logarithmis numerorum fractorum, ſtatuamus $\frac{n+m}{n-m} = \frac{p}{q}$, vnde ſit $n = p+q$ et $m = p-q$, quamobrem habebimus

$$l\frac{p}{q} = \cfrac{2(p-q)}{1(p+q)-\cfrac{1(p-q)^2}{3(p+q)-\cfrac{4(p-q)^2}{5(p+q)-\cfrac{9(p-q)^2}{7(p+q)-\text{etc.}}}}}$$

quae forma eo magis eſt notatu digna, quod ſatis commode adhiberi poteſt ad logarithmos proxime inueſtigandos. Eo magis autem iſtae fractiones continuae conuergent, quo minor fuerit fractio $\frac{p-q}{p+q}$.

§. 23. Quo hoc exemplo illuſtremus, ſumamus $p = 2$ et $q = 1$, vnde quidem non adeo vehemens conuergentia eſt expectanda, eritque

$l\,2 =$

$$l\,2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \cfrac{9}{21 - \text{etc.}}}}}$$

vnde ſumendo tantum primum membrum $\frac{2}{3}$, in fractione decimali prodit $0,666666$, dum ex tabulis habetur $l\,2 = 0,693147$, vbi error iam ſatis eſt exiguus. Capiamus iam bina membra priora $\cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9}} = \frac{9}{13} = 0,6923$. Sumendo autem tria membra habebimus

$$\cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15}}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{15}{131}} = \frac{262}{378} = 0,693121$$

qui valor a veritate deficit quantitate $0,000026$. Multo promptior autem deprehendetur conuergentia, ſi ſumamus $p = 3$ et $q = 2$, vt habeamus

$$l\,\tfrac{3}{2} = \cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{15 - \cfrac{4}{25 - \cfrac{9}{35 - \text{etc.}}}}}$$

cuius primum membrum dat $\frac{2}{5} = 0,400000$; reuera autem eſt $l\,\frac{3}{2} = 0,405465108$. Sumtis autem duobus membris $\cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{15}}$ colligitur $l\,\frac{3}{2} = 0,40540$, vbi error tantum in quin-

quintam figuram irrepit. Sumantur tria membra

$$\cfrac{2}{5-\cfrac{1}{15-\cfrac{4}{25}}} = \cfrac{2}{5-\cfrac{25}{371}} = 0{,}405464$$

vbi error demum in ſeptima figura ſe manifeſtat.

§. 24. Ob hunc inſignem vſum, qui ſe praeter expectationem obtulit, operae pretium erit talem inueſtigationem in genere expedire; atque in hunc finem vtatur formula inter litteras m et n ſupra §. 20. data, vbi ſit

$$l\frac{n+m}{n-m} = \cfrac{2m}{n-\cfrac{mm}{3n-\cfrac{4mm}{5n-\cfrac{9mm}{7n-\cfrac{16mm}{9n-\text{etc.}}}}}}$$

vnde ſi capiamus tantum primum membrum, fiet propemodum $l\frac{n+m}{n-m} = \frac{2m}{n}$; ſumtis autem binis prioribus membris $\cfrac{2m}{n-\cfrac{mm}{3n}}$, erit iam propius $l\frac{n+m}{n-m} = \frac{6mn}{3nn-mm}$; ſumtis vero tribus membris erit

$$l\frac{n+m}{n-m} = \cfrac{2m}{n-\cfrac{mm}{3n-\cfrac{4mm}{5n}}} = \frac{30mnn-8m^3}{15n^3-9mmn}.$$

§. 25. Non adeo autem operoſe eſt has fractiones vlterius continuare: fractionibus enim iam inuentis praefigamus fractionem $\frac{0}{1}$, vt obtineamus hanc fractionum progreſſionem:

$$\overset{\text{I}}{\frac{0}{1}},\quad \overset{\text{II}}{\frac{2m}{n}},\quad \overset{\text{III}}{\frac{6mn}{3nn-mm}},\quad \overset{\text{IV}}{\frac{30mnn-8m^3}{15n^3-9mmn}},$$

cuius tam numeratores quam denominatores ex binis praecedentibus, ad ſimilitudinem ſerierum recurrentium formari poſſunt. Tertia ſcilicet ex prima et ſecunda formatur ope huius ſcalae relationis: $3n, -mm$; quarta vero formatur ex binis praecedentibus ope huius ſcalae relationis $5n, -4mm$. Pro quinta igitur vtendum erit hac ſcala: $7n, -9mm$, pro ſexta hac: $9n, -16mm$, et ita porro. Hoc igitur modo facile reperitur fractio quinta

$$\text{V} = \frac{210mn^3-110m^3n}{105n^4-90mmnn+9m^4}$$

ſimili modo

$$\text{VI} = \frac{1980mn^4-1470m^3nn+128m^5}{945n^5-1050mmn^3+225m^4n} \text{ etc.}$$

§. 26. Hic autem imprimis notaſſe iuuabit, has fractiones continuo augeri, et per incrementa continuo minora ad veritatem accedere. Incrementa autem illa egregio ordine procedunt, vti videre hic licet

$$\text{II}-\text{I} = \frac{2m}{n};$$

$$\text{III}-\text{II} = \frac{2m^3}{n(3nn-mm)};$$

$$\text{IV}-\text{III} = \frac{2.4m^5}{(3nn-mm)(15n^3-9mmn)};$$

$$\text{V}-\text{IV} = \frac{2.4.9.m^7}{(15n^3-9mmn)(105n^4-90mmnn+9m^4)};$$

$$\text{VI}-\text{V} = \frac{2.4.9.16.m^9}{(105n^4-90mmnn+9m^4)(945n^5-1050mmn^3+225m^4n)}$$

vnde

vnde patet, quo maior fuerit numerus n prae m; eo citius has differentias tam fieri exiguas, vt ſine errore negligi queant.

De fractionibus continuis ab arcubus circularibus pendentibus.

§. 27. Ex §. 15. arcus circuli cuius tangens eſt $\frac{ag}{b}$ ita per fractionem exprimetur, vt ſit

$$\text{A tang.}\, \frac{ag}{b} = \cfrac{ag}{b + \cfrac{aagg}{3b + \cfrac{4aagg}{5b + \cfrac{9aagg}{7b + \text{etc.}}}}}$$

Ponamus nunc ad ſimilitudinem ſuperiorum formarum $ag = m$ et $b = n$, atque habebimus

$$\text{A tang.}\, \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n + \cfrac{mm}{3n + \cfrac{4mm}{5n + \cfrac{9mm}{7n + \text{etc.}}}}}$$

quae forma eo citius conuergit, quo maior fuerit numerus n prae m; vnde patet etiam hanc expreſſionem cum fructu ad calculum accommodari poſſe.

§. 28. Incipiamus a caſu quo $m = 1$ et $n = 1$, quo fit

A tang.

$$\text{A tang. } \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \text{etc.}}}}}}$$

quae quidem fractio non adeo conuergit; attamen videamus, quomodo paullatim ad veritatem accedat, quandoquidem nouimus eſſe $\frac{\pi}{4} = 0{,}785398163339$. Ac primum quidem membrum dabit $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}$, (nimis magnum); duo membra praebent $\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, (nimis paruum); tria membra dant $\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}}} = \frac{19}{24} = 0{,}7916$, (nimis magnum). Sumantur quatuor membra, vt fiat

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7}}}} = \frac{40}{51} = 0{,}7843$$

vbi error demum in tertia figura deprehenditur. Ceterum haec fractio continua ſimilis fere eſt illi, quam olim Brounckerus in medium protulit, quae ita ſe habebat:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}$$

Manifeſtum autem eſt noſtram fractionem multo magis conuergere; neque minus concinna eſt cenſenda.

§. 29. Quo autem fractionem continuam magis conuergentem nanciſcamur, ſtatuamus A. tg. $\frac{m}{n} = 30°$, cuius tangens cum ſit $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ne numerus n fiat irrationalis ſumamus $m = \sqrt{3}$ et $n = 3$, hinc igitur fiet

$$\frac{\pi}{6} = \cfrac{\sqrt{3}}{3+\cfrac{3}{9+\cfrac{12}{15+\cfrac{27}{21+\cfrac{48}{27+\text{etc.}}}}}}$$

quae forma reducitur ad ſequentem:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{15+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{27+\cfrac{25}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

pro qua euoluenda quaeramus primo proxime valorem $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, qui eſt 0, 30222998. Nunc vero primum membrum praebet

praebet $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,3333$; duo autem priora praebent

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{10} = 0,3000;$$

tria membra dant

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{15}}} = \frac{49}{162} = 0,30247$$

vbi error quartam demum figuram afficit.

§. 30. Multo promptior autem conuergentia procurari poteſt, dum angulum rectum in duas partes ſecamus, quemadmodum olim oſtendi eſſe A tang. $\frac{1}{2}$ + A tang. $\frac{1}{3}$ = A tang. $1 = \frac{\pi}{4}$. Sic igitur duas fractiones continuas reperiemus, quarum ſumma dabit valorem ipſius $\frac{\pi}{4}$, quae erunt

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{4}{10+\cfrac{9}{14+\text{etc.}}}}} \quad \text{et A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{4}{15+\cfrac{9}{21+\text{etc.}}}}}$$

manifeſtum autem eſt has ambas fractiones, et potiſſimum poſteriorem, vehementer conuergere.

§. 31. Conuertamus vero etiam noſtram fractionem continuam generalem in fractiones communes; ac ex primo membro ſolo reperimus A tang. $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$; ex duobus membris prodit A tang. $\frac{m}{n} = \frac{3mn}{3nn+mm}$; tria membra prae-

 bent

bent A tang. $\frac{m}{n} = \frac{15mnn + 4m^3}{15n^3 + 9mmn}$. Sumantur quatuor membra, vnde fit A tang. $\frac{m}{n} = \frac{105mn^3 + 55m^3n}{105n^4 + 90mmnn + 9m^4}$. Quod ſi nunc his fractionibus praefigatur vt ſupra $\frac{0}{1}$, orietur haec progreſſio:

$$\overset{\text{I}}{\frac{0}{1}},\quad \overset{\text{II}}{\frac{m}{n}},\quad \overset{\text{III}}{\frac{3mn}{3nn + mm}},\quad \overset{\text{IV}}{\frac{15mnn + 4m^3}{15n^3 + 9mmn}},\quad \overset{\text{V}}{\frac{105mn^3 + 55m^3n}{105n^4 + 90mmnn + 9m^4}},$$

cuius ſinguli termini itidem ex praecedentibus binis ſecundum certam legem formari poſſunt, ſcilicet:

pro III ſcala relationis eſt $3n, + mm$

pro IV ſcala relationis eſt $5n, + 4mm$

pro V ſcala relationis eſt $7n, + 9mm$

etc. etc.

DEMON-

DEMONSTRATIO NONNVLLORVM THEOREMATVM EX DOCTRINA SPHAERICA.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Circulorum in ſuperficie Sphaerae deſcriptorum indolem qui examinauerit, facile perſpiciet eos plurimis gaudere proprietatibus, qui certam quandam habent analogiam cum proprietatibus circulorum in plano deſcriptorum. Quum igitur inuentum ſit binos circulos in plano deſcriptos et ad angulos rectos ſe interſecantes, eam habere proprietatem, vt ſi a verticibus diametri vnius horum circulorum per bina centra tranſeuntis, ducantur ad quodcunque punctum alterius circuli, lineae rectae, iſtae rectae datam ſemper inter ſe teneant rationem; ſic quoque demonſtrari poteſt de binis circulis in ſuperficie Sphaerae ſe ad angulos rectos interſecantibus, quod ſi a verticibus diametri vnius horum circulorum per binos Polos circulorum tranſeuntis, ducantur ad quodcunque punctum alterius circuli arcus circulorum maximorum, tum ſemper fore ſinus ex dimidiis his arcubus in data ratione. Prius quam autem huius pro-

prietatis demonſtrationem heic proponamus, primum iſtam proprietatem circulorum in plano deſcriptorum facili demonſtratione confirmare placebit.

Tab III. Fig. 1. §. 2. Sint igitur bini circuli A G B, D G F ſe ad angulos rectos in G interſecantes, ita vt, ductis ad centra circulorum C et E lineis rectis G C, G E, ſit C G E angulus rectus, tumque a verticibus A, B diametri A C B per centrum E alterius circuli tranſeuntis, ducantur ad punctum quoduis iſtius circuli lineae rectae A H, B H, erunt hae rectae inter ſe in data ratione, vti A G ad B G. Nam ob angulum A G B = 90° = C G E, ablato communi angulo C G B, erit A G C = B G E; at A G C = C A G, ob A C = C G, hinc B G E = E A G; et ob ang. G E B vtroque triangulo G E B, A G E communem, △ G B E ∾ A G E, hinc A E : G E = G E : B E, per Theor. IV. Lib. VI. Euclid. Vnde ducta linea H E ob H E = G E, erit quoque A E : H E = H E : B E, ideoque △ H B E ∾ H A E, per Theor. VII. Lib. VI. Euclid, ſeu angulus B H E = B A H et A H E = H B E, quamobrem fiet A H : B H = A E : B E = A G : B G.

§. 3. Pro demonſtranda autem iſta proprietate circulorum in ſuperficie Sphaerae ſe ad angulos rectos interſecantium, neceſſum eſt, vt Lemmatis inſtar ſequens praemittamus.

Theorema.

Tab. III. Fig. 2. *Si circulum quempiam A E B in ſuperficie Sphaerae deſcriptum tangat arcus circuli maximi F E in puncto E, tum-*

tumque ducatur arcus circuli maximi F A B, qui iſtum circulum minorem in punctis A, B interſecet, et iungatur punctum E cum punctis A, B arcubus circulorum maximorum A E, B E: erit ſin. F A : ſin. F B = ſin. ½ A E² : ſin. ½ B E².

Demonſtratio.

Sit C Polus circuli iſtius A E B, tumque ex punctis, A, E et B ad hunc Polum ducti concipiantur arcus circulorum maximorum A C, E C, B C. Quum igitur ſit in triangulo F E B

ſin. F B : ſin. F E = ſin. F E B : ſin. F B E

et in triangulo F A E

ſin. F E : ſin. F A = ſin. F A E : ſin. F E A

erit componendo rationes

ſin. F B : ſin. F A = ſin. F E B : ſin. F A E : ſin. F B E : ſin. F E A,

atqui eſt in triangulo A E B,

ſin. E A B : ſin. A B E = ſin. E B : ſin. E A,

proinde

ſin. F B : ſin. F A = ſin. E B. ſin. F E B : ſin. E A. ſin. F B E.

Praeterea vero liquet eſſe ſin. F E B = coſ. C E B, ob ang F E C = 90°; at per eandem rationem, ſin. F E A = coſ. A E C, hinc colligitur

ſin. F E B = coſ. C E B = tang. ½ E B. cot. B C et

ſin. F E A = coſ. A E C = tang. ½ E A. cot. B C;

quamobrem denique fiet

ſin. F B : ſin. F A = ſin. E B tang. ½ E B : ſin. E A tang. ½ E A

= ſin. ½ E B² : ſin. ½ E A².

§. 4.

§. 4. Hoc Theoremate iam demonſtrato nunc progredimur ad Theorema noſtrum principale primum, quod ita enunciatur.

Theorema 1.

Si bini circuli B G D, C G A in ſuperficie Sphaerae deſcripti ſe interſecent ad angulum rectum, et ex punctis A, B, vbi circulus maximus per polos E, F circulorum propoſitorum tranſiens ſecat circulum B G A, ducantur ad punctum quoduis H alterius circuli C G D, arcus circulorum maximorum B H, A H, erit ſin. ½ A H : ſin. ½ B H in conſtanti ratione.

Demonſtratio.

Pro hac propoſitione demonſtranda, ratiocinio primum vtamur Analytico, quem in finem arcus A H, B H, G F, G E, A F, B F, E F reſpectiue indigetentur litteris x, y, a, b, c, e, d, angulus autem H F A littera ϕ, tumque fiet:

$$\text{coſ.}\, x = \text{coſ.}\, a \,\text{coſ.}\, c + \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, c \,\text{coſ.}\, \phi \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, y = \text{coſ.}\, a \,\text{coſ.}\, e + \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, e \,\text{coſ.}\, \phi,$$

quum itaque ſit $\text{coſ.}\, a = \frac{\text{coſ.}\, d}{\text{coſ.}\, b}$, ſi pro coſ. a hic valor introducatur, prodibit

$$\text{coſ.}\, x = \frac{\text{coſ.}\, d \,\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, b} + \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, c \,\text{coſ.}\, \phi \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, y = \frac{\text{coſ.}\, d \,\text{coſ.}\, e}{\text{coſ.}\, b} + \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, e \,\text{coſ.}\, \phi, \text{ tumque}$$

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{1 - \text{coſ.}\, x}{2} = \frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, d \,\text{coſ.}\, c}{2 \,\text{coſ.}\, b} - \tfrac{1}{2} \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, c \,\text{coſ.}\, \phi,$$

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} y^2 = \frac{1 - \text{coſ.}\, y}{2} = \frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, d \,\text{coſ.}\, e}{2 \,\text{coſ.}\, b} - \tfrac{1}{2} \text{ſin.}\, a \,\text{ſin.}\, e \,\text{coſ.}\, \phi.$$

Quum

Quum igitur ſit $b = d - c$ et $b = e - d$, fiet:

$$\text{coſ. } b - \text{coſ. } d \text{ coſ. } c = \text{ſin. } d \text{ ſin. } c \text{ et}$$

$$\text{coſ. } b - \text{coſ. } e \text{ coſ. } d = \text{ſin. } d \text{ ſin. } e,$$

hincque colligitur:

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{\text{ſin. } d \text{ ſin. } c}{2 \text{ coſ. } b} - \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } a \text{ ſin. } c \text{ coſ. } \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } c}{2 \text{ coſ. } b} (\text{ſin. } d - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. } \Phi);$$

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} y^2 = \frac{\text{ſin. } d \text{ ſin. } e}{2 \text{ coſ. } b} - \tfrac{1}{2} \text{ ſin } a \text{ ſin. } e \text{ coſ. } \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } e}{2 \text{ coſ. } b} (\text{ſin. } d - \text{ſin. } a \text{ coſ. } b \text{ coſ. } \varphi);$$

vnde denique deducitur:

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} x^2 : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} y^2 = \text{ſin. } c : \text{ſin. } e.$$

Verum nunc praeſtabit, vt aliam Demonſtrationem magis Geometricam et ex Theoremate praemiſſo deducendam adferamus. Ducatur arcus circuli maximi H I, tangens circulum C G D in puncto H, atque arcus E I a Polo perpendicularis circulo maximo A B, occurrat iſti H I in puncto I, tumque iungantur I A, I F, arcubus circulorum maximorum. Quum igitur ſit angulus E G F rectus, erit per proprietates triangulorum Sphaericorum rectangulorum:

$$\text{coſ. E F} = \text{coſ. E G. coſ. F G} = \text{coſ. E A coſ. F H},$$

tum vero eſt,

$$\text{coſ. I H} = \frac{\text{coſ. I F}}{\text{coſ. F H}} = \frac{\text{coſ. E F coſ. E I}}{\text{coſ. F H}}$$

ob ang. I E H rectum, hinc

$$\text{coſ. I H} = \text{coſ. E A. coſ. E I} = \text{coſ. I A},$$

ideoque arcus I A = I H = I B. Si igitur polo I, intervallo arcu circuli maximi I A vel I B deſcribatur circulus per A, B, is quoque per H tranſibit, tumque ob angulum I H F rectum, erit arcus circuli maximi H F, tangens

 iſtius

iſtius circuli per A, H, B deſcripti. Hinc per Theorema modo demonſtratum omnino colligitur eſſe:

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} AH^2 : \text{ſin.} \tfrac{1}{2} BH^2 = \text{ſin.} FA : \text{ſin.} FB.$$

§. 5. Per hoc Theorema patet, Problemati, quo quaeritur linea curua in dato quodam plano ſita et ita comparata, vt ductis a binis punctis fixis, ad quodlibet eius punctum lineis rectis, hae rectae ſemper in data ſint ratione, omnino per circulum ſatisfieri; ſiue iſta puncta in eodem iſto plano, ſeu extra id fuerint ſita. Caeterum hoc quoque colligi poteſt ex Theoremate de binis circulis in
Tab. III. eodem plano ſe ad angulos rectos interſecantibus. Nam
Fig. 1. ſi intelligamus ſuperficiem Sphaericam deſcribi reuolutione circuli D G F circa axem D E F, facile perſpicimus omnia huius ſuperficiei puncta eam habere proprietatem, vt ſi iungantur cum binis punctis datis A et B, tunc ſint iſtae rectae ab A et B ad quodlibet ſuperficiei punctum ductae, inter ſe in data ratione. Iam vero ſi iſta Sphaera ſecta intelligatur per planum quodpiam, omni in caſu interſectio huius plani cum Sphaera erit circulus, vnde quemcunque demum ſitum iſte habuerit circulus, ſemper haec illi competet proprietas, quod ductis a quolibet eius puncto ad A et B lineis rectis, hae rectae datam teneant rationem.

§. 6. Quemadmodum ex praecedentibus intelligi-
Fig. 3. tur, Problemati quo quaeritur in ſuperficie Sphaerica linea curua, ita comparata vt iuncto quouis eius puncto H cum binis punctis fixis A, B arcubus circulorum maximorum A H, B H, ſit ſin. $\tfrac{1}{2}$ A H : ſin. $\tfrac{1}{2}$ B H in data ratione, per circulum ſatisfieri; ita nondum inde colligi debet huiusmodi curuam cir-

circularem habere figuram, ſi Problema ita immutetur, vt iam vel ſinus, vel coſinus, vel tangentes integrorum arcuum A H, B H, vel coſinus et tangentes dimidiorum arcuum in data cenſeantur eſſe ratione. Pro caſu quidem quo coſinuum ex arcubus A H, B H ratio ſupponitur conſtans, circulus maximus Sphaerae ſatisfit; nam ſi arcus A B ita in M ſectus intelligatur, vt ſit coſ. A M : coſ. B M in data iſta ratione, tumque per M ductus concipiatur circulus maximus normalis ad A B, quodcunque punctum huius circuli maximi H, hanc habebit proprietatem, vt ſit coſ. A H : coſ. B H in data ratione; eſt enim: Tab. III. Fig. 4

$$\text{coſ. } AH : \text{coſ. } BH = \text{coſ. } AM \text{ coſ. } MH : \text{coſ. } BM \text{ coſ. } MH$$
$$= \text{coſ. } AM : \text{coſ. } BM.$$

At ſi quaeſtio ſit de linea curua, pro qua ratio ſinuum ex arcubus A H, H B eſſe debeat conſtans, ea nequaquam erit circulus; nam ſi arcus A B intelligatur biſectus in C, et iungatur C H, tumque indigitentur arcus A H, B H, A C, C H reſpectiue per litteras x, y, a, z, et angulus H C B per ϕ, habebimus ex triangulo Sphaerico A C H:

$$\text{coſ. } x = \text{coſ. } a \text{ coſ. } z - \text{ſin. } a \text{ ſin. } z \text{ coſ. } \Phi$$

et ex triangulo Sphaerico B C H

$$\text{coſ. } y = \text{coſ. } a \text{ coſ. } z + \text{ſin. } a \text{ ſin. } z \text{ coſ. } \Phi,$$

quae aequationes quoque ſic repraeſentari poſſunt:

$$\text{coſ. } x = \text{coſ. } (a - z) - 2 \text{ ſin. } a \text{ ſin. } z \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\Phi^2 \text{ et}$$
$$\text{coſ. } y = \text{coſ. } (a - z) - 2 \text{ ſin. } a \text{ ſin } z \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\Phi^2, \text{ ſiue}$$
$$\text{coſ. } x = \text{coſ. } (a - z) \text{ ſin } \tfrac{1}{2}\Phi^2 + \text{coſ. } (a + z) \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$
$$\text{coſ. } y = \text{coſ. } (a - z) \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\Phi^2 + \text{coſ. } (a + z) \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\phi^2,$$

et ob

$$\text{coſ. } x^2 = 1 - \text{ſin. } x^2 = 1 - m^2 + m^2 \text{ coſ } y^2,$$

poſito ſin. x : ſin. $y = m : 1$, conſequemur hanc aequationem :

$$\text{coſ.}(a-z)^2 \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^4 + 2\,\text{coſ.}(a-z)\,\text{coſ}(a+z)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$+ \text{coſ.}(a+z)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^4 = 1 - m^2 + m^2 (\text{coſ.}(a-z)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^4$$
$$+ 2\,\text{coſ.}(a-z)\,\text{coſ.}(a+z)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$+ \text{coſ.}(a+z)^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2)$$

quae pro circulo eſſe nequit, niſi fuerit $m = 1$. Hincque iam perſpicitur, ſi quaeſtio fuerit de curua, in qua ratio Tangentium ex A H, B H eſſe debeat conſtans, illam cum circulo non coincidere.

§. 7. Verum pro caſu quo ratio coſinuum ex dimidiis arcubus A H B H ſupponitur conſtans, curua ſatisfaciens iterum euadet circulus, quod calculum ex aequationibus §. praecedentis inſtituenti facile patebit: eſt enim

$$1 + \text{coſ.}\,x = 1 + \text{coſ.}(a-z) - 2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2 \text{ et}$$
$$1 + \text{coſ.}\,y = 1 + \text{coſ.}(a-z) - 2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2,$$

ideoque ſi ſtatuatur $m(1 + \text{coſ.}\,x) = 1 + \text{coſ.}\,y$, haec emerget aequatio:

$$m\,(1 + \text{coſ.}(a-z)) - 2\,m\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2$$
$$= 1 + \text{coſ.}(a-z) - 2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2$$

vnde prodit

$$(m-1)\,\frac{1+\text{coſ.}(a-z)}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z} = m(1 + \text{coſ.}\,\Phi) - (1 - \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$= (m-1) + (m+1)\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ hincque}$$
$$\frac{1+\text{coſ.}(a-z)}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z} = 1 + \frac{m+1}{m-1}\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

vnde denuo prodit:

$$1 + \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,z = \frac{m+1}{m-1}\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,z\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

quae aequatio manifeſto eſt pro circulo. Caeterum ſi ſuppo-

ponantur (Fig. 3.) arcus A H, B H producti, vsque dum circulo maximo B E A iterum in A', B' occurrant, erit

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, AH = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, A'H \text{ et } \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, BH = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, B'H,$$

quare ob ſin. $\frac{1}{2}$ A H et ſin. $\frac{1}{2}$ B H in data ratione, ratio quoque coſ. $\frac{1}{2}$ A' H, coſ. $\frac{1}{2}$ B' H erit data. Denique ſi ratio tangentium ex dimidiis arcubus A H, B H fuerit data, curua quaeſita circulus eſſe nequit, nam ſi ſtatuatur tang. $\frac{1}{2} x$: tang. $\frac{1}{2} y$ in data ratione, erit quoque

$$m\,(1 - \text{coſ.}\, x)\,(1 + \text{coſ.}\, y) = (1 - \text{coſ.}\, y)\,(1 + \text{coſ.}\, x).$$

Hinc ob

$$1 - \text{coſ.}\, x = 1 - \text{coſ.}\,(a - z) + 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2;$$
$$1 + \text{coſ.}\, y = 1 + \text{coſ.}\,(a - z) - 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2;$$
$$1 + \text{coſ.}\, x = 1 + \text{coſ.}\,(a - z) - 2\, \text{ſin}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2;$$
$$1 - \text{coſ.}\, y = 1 - \text{coſ.}\,(a - z) + 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2;$$

ideoque

$$(1 - \text{coſ.}\, x)\,(1 + \text{coſ.}\, y) = \text{ſin.}\,(a - z)^2 + 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi$$
$$+ 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\,(a - z) - \text{ſin.}\, a^2\, \text{ſin.}\, z^2\, \text{ſin.}\, \Phi^2;$$
$$(1 + \text{coſ.}\, x)\,(1 - \text{coſ.}\, y) = \text{ſin.}\,(a - z)^2 - 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi$$
$$+ 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\,(a - z) - \text{ſin.}\, a^2\, \text{ſin.}\, z^2\, \text{ſin.}\, \Phi^2, \text{ ob}$$
$$\text{coſ.}\, \Phi = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2 - \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi^2 \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\, \Phi = 2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, \Phi,$$

aequatio igitur pro curua erit:

$$m\,(\text{ſin}\,(a - z)^2 + 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi + 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\,(a - z)$$
$$- \text{ſin.}\, a^2\, \text{ſin.}\, z^2\, \text{ſin.}\, \Phi^2) = \text{ſin.}\,(a - z)^2 - 2\, \text{ſin}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, \Phi$$
$$+ 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\,(a - z) - \text{ſin.}\, a^2\, \text{ſin.}\, z^2\, \text{ſin.}\, \Phi^2,$$

quae quidem, caſu $m = 1$, exiſtente tunc coſ. $\Phi = 0$, eſt

 pro

pro circulo maximo; reliquis vero caſibus ab aequatione pro circulo valde differt.

Theorema 2.

Tab. III. Fig. 5. §. 8. *Circulo in ſuperficie Sphaerae deſcripto B C A, ſi inſcriptum intelligatur triangulum Sphaericum B C A, eiusque latera A B, B C, A C producantur vsque dum oppoſitis arcubus circulorum maximorum C F, A D, B E circulum propoſitum in C, A et B tangentibus occurrant, puncta iſta occurſus F, D, E ſuper eodem circulo maximo reperientur.*

Demonſtratio.

Ducatur arcus circuli maximi A G ea ratione, vt angulus $AGF = BDF$; erit igitur in triangulis B D F, A G F, ob angulum A F G communem et $AGF = BDF$, $\text{ſin.}\, BF : \text{ſin.}\, AF = \text{ſin.}\, BD : \text{ſin.}\, AG$. At per Theorema noſtrum praeliminare ob arcum F C tangentem et F A B ſecantem circulum B C A erit:

$$\text{ſin.}\, FB : \text{ſin.}\, AF = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} BC^2 : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AC^2,$$

ſimilique modo

$$\text{ſin.}\, DB : \text{ſin.}\, DC = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AB^2 : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AC^2 \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\, EC : \text{ſin.}\, EA = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} BC^2 : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AB^2;$$

vnde componendo vltimas has rationes:

$$\text{ſin.}\, DB\, \text{ſin.}\, EC : \text{ſin.}\, DC\, \text{ſin.}\, EA = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} BC^2 : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AC^2$$
$$= \text{ſin.}\, FB : \text{ſin.}\, AF = \text{ſin.}\, DB : \text{ſin.}\, AG.$$

Hincque colligitur:

$$\text{ſin.}\, EC : \text{ſin.}\, EA = \text{ſin.}\, CD : \text{ſin.}\, AG,$$

quod fieri nequit niſi arcus circuli maximi D G productus oc-

occurrat arcui A C in E. Nam ſi D G occurreret ipſi A C in E′, ob ang. A G F = B D F, fiet A G D = C D E′, hincque

ſin. E′ A : ſin. E′ C = ſin. C D : ſin. A G = ſin. E A : ſin. E C,

quod locum habere non poteſt, niſi puncta E et E′ coincidant. Si ſcilicet arcus E C, E A per α, β indicentur, et arcus E E′ per x, eſſe deberet

$$\text{ſin.}(x+\alpha) : \text{ſin.}(x+\beta) = \text{ſin.}\,\alpha : \text{ſin.}\,\beta, \text{ hinc}$$

$$\text{ſin.}\,x \cot.\alpha + \text{coſ.}\,x = \text{ſin.}\,x \cot.\beta + \text{coſ.}\,x \text{ et } \cot.\alpha = \cot.\beta,$$

quod eſt abſonum. Neceſſum igitur eſt vt arcus G D productus tranſeat per E, ideoque tria iſta puncta E, D, F in eodem erunt circulo maximo; ſimili ratione ac de planis demonſtrari poteſt, quod ſi circulo in plano deſcripto inſcriptum fuerit triangulum, eiusque latera producantur vsque dum tangentibus circuli oppoſitis occurrant, tum tria iſta puncta contactus ſita fore in eadem linea recta. Demonſtrationes autem huius Theorematis, quum valde obviae ſint, heic adferre, nihil attinet.

SERIERVM QVARVNDAM SINGVLARIVM SVMMATIO.

Auctore

NICOLAO FUSS.

Si pro ſerie quacunque in genere ſtatuantur

Indices:	0,	1,	2,	3 - - - -	x
Termini:	A,	B,	C,	D - - - -	X

Differ. 1^{ae}. ΔA, ΔB, ΔC, ΔD etc.

—— 2^{ae}. $\Delta^2 A$, $\Delta^2 B$, $\Delta^2 C$, $\Delta^2 D$ etc.

—— 3^{ae}. $\Delta^3 A$, $\Delta^3 B$, $\Delta^3 C$, $\Delta^3 D$ etc.

per ea quae de vſu differentiarum in ſerierum doctrina docent Geometrae, conſtat terminum generalem huius ſeriei ita expreſſum iri:

$$X = A + \Delta A\, x + \Delta^2 A \frac{x(x-1)}{1.2} + \Delta^3 A \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, primo membro ad ſiniſtram partem translato, per x diuidendo prodit haec ſeries:

$$\frac{X-A}{x} = \Delta A + \Delta^2 A \frac{(x-1)}{2} + \Delta^3 A \frac{(x-1)(x-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

quae, ſi ponatur $x = 0$, abit in hanc:

$$\Delta A - \tfrac{1}{2}\Delta^2 A + \tfrac{1}{3}\Delta^3 A - \tfrac{1}{4}\Delta^4 A + \text{etc.}$$

cuius

cuius ergo ſumma exprimitur formula: $\frac{X-A}{x}$, quae quidem, poſito $x=0$, ob $X=A$ fit $\frac{X-A}{x}=\frac{0}{0}$; verum quouis caſu determinato valorem huius fractionis ſiue ſeriei modo traditae ſummam facili negotio definire licebit.

His in genere praenotatis ſequentium duarum ſerierum alias haud facilis indaginis, mihi ab Illuſtri quodam Geometra quondam propoſitarum ſummationem aggredior:

I. $l\,2 - \frac{1}{2}\,l\,\frac{3}{2^2} + \frac{1}{3}\,l\,\frac{4.2^2}{3^3} - \frac{1}{4}\,l\,\frac{5.3^6}{2^4.4^4} + \frac{1}{5}\,l\,\frac{6.2^5.4^{10}}{3^{10}.5^5} - \text{etc.}$

II. $2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi + \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,3\Phi - \frac{1}{3}.\,2^3\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,4\Phi - \frac{1}{4}.\,2^4\,\text{ſin.}\,\Phi^4\,\text{ſin.}\,5\Phi + \frac{1}{5}.\,2^5\,\text{ſin.}\,\Phi^5\,\text{coſ.}\,6\Phi + \text{etc.}$

Vtriusque lex progreſſionis ex ſequentibus clarius apparebit.

I. Summatio ſeriei

$$l\,2 - \frac{1}{2}\,l\,\frac{3}{2^2} + \frac{1}{3}\,l\,\frac{4.2^2}{3^3} - \frac{1}{4}\,l\,\frac{5.3^6}{2^4.4^4} + \frac{1}{5}\,l\,\frac{6.2^5.4^{10}}{3^{10}.5^5} - \text{etc.}$$

Pro ſummanda hac ſerie ponatur terminus generalis $X = l(1+x)$, eritque ſeries fundamentalis

$$l\,1 + l\,2 + l\,3 + l\,4 + l\,5 + l\,6 + \text{etc.}$$

ita vt ſint

Term. ſeriei.	Differentiae. I^ae	II^ae.	III^ae	IV^ae.	V^ae.	VI^ae.
$A = l\,1$	$l\,\frac{2}{1}$	$l\,\frac{1.3}{2^2}$	$l\,\frac{2^3.4}{1.3^3}$	$l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4}$	$l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5}$	$l\,\frac{1.3^{15}.5^{15}.7}{2^6.4^{20}.6^6}$
$B = l\,2$	$l\,\frac{3}{2}$	$l\,\frac{2.4}{3^2}$	$l\,\frac{3^3.5}{2.4^3}$	$l\,\frac{2.4^6.6}{3^4.5^4}$	$l\,\frac{3^5.5^{10}.7}{2.4^{10}.6^5}$	
$C = l\,3$	$l\,\frac{4}{3}$	$l\,\frac{3.5}{4^2}$	$l\,\frac{4^3.6}{3.5^3}$	$l\,\frac{3.5^6.7}{4^4.6^4}$		
$D = l\,4$	$l\,\frac{5}{4}$	$l\,\frac{4.6}{5^2}$	$l\,\frac{5^3.7}{4.6^3}$			
$E = l\,5$	$l\,\frac{6}{5}$	$l\,\frac{5.7}{6^2}$				
$F = l\,6$	$l\,\frac{7}{6}$					
$G = l\,7$						

Ex hac tabula excerpamus tantum membra ſuprema cuiusque columnae, quae ita ordine procedunt:

$A = l\,1$	$\Delta A = l\,\frac{2}{1}$
$\Delta^2 A = l\,\frac{1.3}{2^2}$	$\Delta^3 A = l\,\frac{2^3.4}{1.3^3}$
$\Delta^4 A = l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4}$	$\Delta^5 A = l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5}$
$\Delta^6 A = l\,\frac{1.3^{15}.5^{15}.7}{2^6.4^{20}.6^6}$	$\Delta^7 A = l\,\frac{2^7.4^{35}.6^{21}.8}{1.3^{21}.5^{35}.7^7}$
etc.	etc.

Series igitur hinc formata ita ſe habebit:

$$l\,2 - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1.3}{2^2} + \tfrac{1}{3}\,l\,\frac{2^3.4}{1.3^3} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1.2^6.5}{2^4.4^4} + \tfrac{1}{5}\,l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5} - \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma eſt $\frac{X - A}{x} = \frac{l(1+x) - l\,1}{x}$, quae autem formula caſu $x = 0$ fit indeterminata; eius igitur differentialia ſunt ſumenda, quo facto fit $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1$. Sequentem igitur hoc modo nacti ſumus ſummationem maxime memorabilem:

$$l\,2 - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1.3}{2^2} + \tfrac{1}{3}\,l\,\frac{2^3.4}{1.3^3} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4} + \tfrac{1}{5}\,l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5} - \text{etc.} = 1.$$

II. Summatio ſeriei

$$2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{1}{2}.\,2^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,3\Phi - \tfrac{1}{3}.\,2^3\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,4\Phi$$
$$- \tfrac{1}{4}.\,2^4\,\text{ſin.}\,\Phi^4\,\text{ſin.}\,5\Phi + \tfrac{1}{5}.\,2^5\,\text{ſin.}\,\Phi^5\,\text{coſ.}\,6\Phi + \text{etc.}$$

Statuatur $X = \text{ſin.}\,(1 + 2x)\Phi$, eritque ſeries cuius X eſt terminus generalis

$$\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,3\Phi + \text{ſin.}\,5\Phi + \text{ſin.}\,7\Phi + \text{etc.}$$

cuius ſi differentiae membrorum ſumantur, eae ob

$$\text{ſin.}\,n\Phi - \text{ſin.}\,(n-2)\Phi = 2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(n-1)\Phi \quad \text{et}$$
$$\text{coſ.}\,n\Phi - \text{coſ.}\,(n-2)\Phi = -2\,\text{ſin}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(n-1)\Phi$$

ſequentibus ſeriebus exprimentur:

Differ.

Diff. I^{ae}.	$+ 2 \sin. \Phi (\cos. 2\Phi + \cos. 4\Phi + \cos. 6\Phi + \text{etc.})$
— II^{ae}.	$- 2^2 \sin. \Phi^2 (\sin. 3\Phi + \sin. 5\Phi + \sin. 7\Phi + \text{etc.})$
— III^{ae}.	$- 2^3 \sin. \Phi^3 (\cos. 4\Phi + \cos. 6\Phi + \cos. 8\Phi + \text{etc.})$
— IV^{ae}.	$+ 2^4 \sin. \Phi^4 (\sin. 5\Phi + \sin. 7\Phi + \sin. 9\Phi + \text{etc.})$
— V^{ae}.	$+ 2^5 \sin. \Phi^5 (\cos. 6\Phi + \cos. 8\Phi + \cos. 10\Phi + \text{etc.})$
	etc. . . . . etc.

ita vt hoc caſu habeamus

$$\Delta A = + 2 \sin. \Phi \cos. 2\Phi$$
$$\Delta^2 A = - 2^2 \sin. \Phi^2 \sin. 3\Phi$$
$$\Delta^3 A = - 2^3 \sin. \Phi^3 \cos. 4\Phi$$
$$\Delta^4 A = + 2^4 \sin. \Phi^4 \sin. 5\Phi$$
etc.

vnde patet ſeriem ex his differentiis formatam eam ipſam eſſe, cuius ſummam inueſtigare nobis eſt propoſitum, ſcilicet:

$$2 \sin. \phi \cos. 2\phi + \tfrac{1}{2}. 2^2 \sin. \phi^2 \sin. 3\phi - \tfrac{1}{3}. 2^3 \sin. \phi^3 \cos. 4\phi - \tfrac{1}{4}. 2^4 \sin. \phi^4 \sin. 5\phi + \tfrac{1}{5}. 2^5 \sin. \phi^5 \cos. 6\phi + \text{etc.}$$

cuius ſeriei igitur ſumma hac formula exprimitur:

$$\frac{X - A}{x} = \frac{\sin.(1 + 2x)\Phi - \sin.\Phi}{x},$$

quae quidem, ſumto $x = 0$ abit in $\frac{0}{0}$; verum ſumtis differentialibus prodit

$$\frac{2\Phi\, dx \cos.(1 + 2x)\Phi}{dx} = 2\phi \cos.\phi,$$

ſicque nacti ſumus hanc ſummationem memorabilem:

$$2\phi \cos.\phi = \begin{cases} 2 \sin.\phi \cos. 2\phi + \tfrac{1}{2}. 2^2 \sin.\phi^2 \sin. 3\phi \\ - \tfrac{1}{3}. 2^3 \sin.\phi^3 \cos 4\phi - \tfrac{1}{4}. 2^4 \sin.\phi^4 \sin. 5\phi \\ + \tfrac{1}{5}. 2^5 \sin.\phi^5 \cos. 6\phi + \text{etc.} \end{cases}$$

cuius veritas etiam ſequentem in modum demonſtrari poteſt.

Demonſtratio huius ſummationis.

Ponatur breuitatis gratia $2 \sin. \Phi = \alpha$ et diſcerpatur ſeries in has duas partes:

$$2 \Phi \cos. \Phi = \begin{cases} \alpha \cos. 2\Phi - \frac{1}{3}\alpha^3 \cos. 4\Phi + \frac{1}{5}\alpha^5 \cos. 6\Phi - \text{etc.} \\ \frac{1}{2}\alpha^2 \sin. 3\Phi - \frac{1}{4}\alpha^4 \sin. 5\Phi + \frac{1}{6}\alpha^6 \sin. 7\Phi - \text{etc.} \end{cases}$$

et vtriusque ſummam ſeorſim inueſtigemus. Hunc in finem notetur, poſito

$$\cos. \Phi + \sqrt{-1}. \sin. \Phi = p$$

$$\cos. \Phi - \sqrt{-1}. \sin. \Phi = q$$

ſinus et coſinus angulorum multiplorum fore

$\cos. \Phi = \frac{p+q}{2}$	$\sin. \Phi = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}}$
$\cos. 2\Phi = \frac{p^2+q^2}{2}$	$\sin. 2\Phi = \frac{p^2-q^2}{2\sqrt{-1}}$
$\cos. 3\Phi = \frac{p^3+q^3}{2}$	$\sin. 3\Phi = \frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}}$
etc.	etc.

quibus in noſtra ſerie ſubſtitutis prodit:

$$2 \Phi \cos. \Phi = \begin{cases} \alpha \left(\frac{p^2+q^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\alpha^3 \left(\frac{p^4+q^4}{2}\right) + \frac{1}{5}\alpha^5 \left(\frac{p^6+q^6}{2}\right) - \text{etc.} \\ \frac{1}{2}\alpha^2 \left(\frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{4}\alpha^4 \left(\frac{p^5-q^5}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{6}\alpha^6 \left(\frac{p^7-q^7}{2\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

Ponatur ſumma ſeriei ſuperioris $= \frac{P}{2}$, inferioris vero $= \frac{Q}{2\sqrt{-1}}$, ita vt habeamus:

$$2 \Phi \cos. \Phi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{-1}}, \text{ eritque}$$

$$P = \begin{cases} \alpha p p - \frac{1}{3}\alpha^3 p^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 p^6 - \frac{1}{7}\alpha^7 p^8 + \text{etc.} \\ \alpha q q - \frac{1}{3}\alpha^3 q^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 q^6 - \frac{1}{7}\alpha^7 q^8 + \text{etc.} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^2 p^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 p^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 p^7 - \frac{1}{8}\alpha^8 p^9 + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2}\alpha^2 q^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 q^5 - \frac{1}{6}\alpha^6 q^7 + \frac{1}{8}\alpha^8 q^9 - \text{etc.} \end{cases}$$

Ex

Ex elementis autem conſtat eſſe

$$A\ \mathrm{tang.}\ v = v - \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{5}v^5 - \tfrac{1}{7}v^7 + \tfrac{1}{9}v^9 - \mathrm{etc.}$$

$$\log.(1 + zz) = z^2 - \tfrac{1}{2}z^4 + \tfrac{1}{3}z^6 - \tfrac{1}{4}z^8 + \tfrac{1}{5}z^{10} - \mathrm{etc.}$$

vnde ſtatim manifeſtum eſt fore

$$P = p\ A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p + q\ A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q$$

$$Q = \tfrac{1}{2}p\,l(1 + \alpha\alpha pp) - \tfrac{1}{2}q\,l(1 + \alpha\alpha qq)$$

et nunc demonſtrandum eſt quod ſit

$$2\Phi\ \mathrm{cof.}\ \Phi = \tfrac{p}{2}\ A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p + \tfrac{p}{4\sqrt{-1}}\,l(1 + \alpha\alpha pp)$$

$$+ \tfrac{q}{2}\ A\ \mathrm{tang}\ \alpha q - \tfrac{q}{4\sqrt{-1}}\,l(1 + \alpha\alpha qq).$$

Hunc in finem conſideremus primo valorem P, et cum poſuerimus

$$p = \mathrm{cof}\ \Phi + \sqrt{-1}\ \mathrm{fin.}\ \Phi$$

$$q = \mathrm{cof.}\ \Phi - \sqrt{-1}\ \mathrm{fin.}\ \Phi,$$

his valoribus in coëfficientibus tantum ſuffectis prodibit:

$$P = \mathrm{cof.}\ \Phi\ (A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p + A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q)$$

$$+ \mathrm{fin.}\ \Phi \sqrt{-1}\ (A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p - A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q.).$$

Eſt vero

$$A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p + A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q = A\ \mathrm{tang.}\ \frac{\alpha(p+q)}{1 - \alpha\alpha pq}$$

$$A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p - A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q = A\ \mathrm{tang.}\ \frac{\alpha(p-q)}{1 + \alpha\alpha pq},$$

quae expreſſiones ob

$$p + q = 2\ \mathrm{cof.}\ \Phi \quad \text{et} \quad p - q = 2\sqrt{-1}\ \mathrm{fin.}\ \Phi$$

in has contrahuntur:

$$A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p + A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q = A\ \mathrm{tang.}\ \frac{2\alpha\ \mathrm{cof.}\ \Phi}{1 - \alpha\alpha}$$

$$A\ \mathrm{tang.}\ \alpha p - A\ \mathrm{tang.}\ \alpha q = A\ \mathrm{tang.}\ \frac{2\alpha\ \mathrm{fin.}\ \Phi\sqrt{-1}}{1 + \alpha\alpha},$$

 ita

ita vt nunc ſit

$$P = \cos.\Phi\, A\,\text{tang.}\,\frac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} + \sin.\Phi\sqrt{-1}\; A\,\text{tang.}\,\frac{2\alpha\sin.\Phi\sqrt{-1}}{1+\alpha\alpha}.$$

Hanc autem expreſſionem ſequenti modo ad maiorem concinnitatis gradum euehere licet. Incipiendo a parte poſteriore, ob

$$A\ \text{tang.}\,t = \int\frac{dt}{1+tt} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}},$$

ſumatur $t = \frac{2\alpha\sqrt{-1}\sin.\Phi}{1+\alpha\alpha}$, eritque

$$A\ \text{tang.}\,\frac{2\alpha\sqrt{-1}\sin.\Phi}{1+\alpha\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{1+2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}.$$

Multiplicetur haec fractio $\frac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{1+2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}$ ſupra et infra per $1+\alpha\alpha-2\alpha\sin.\Phi$, eritque hoc membrum

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{(1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha)^2}{(1+\alpha\alpha)^2-4\alpha\alpha\sin.\Phi^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{\sqrt{1+2\alpha\alpha\cos.2\Phi+\alpha^4}}.$$

At vero ob $2\sin.\Phi = \alpha$ eſt $1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha = 1$, vnde tota haec pars valoris P reducitur ad

$$-\tfrac{1}{2}\sin.\Phi\, l\,(1+2\alpha\alpha\cos.2\Phi+\alpha^4).$$

Altera pars valoris P, $\cos.\Phi\, A\,\text{tang.}\,\frac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha}$, hoc modo reducitur: Cum ſit $\alpha = 2\sin.\Phi$, erit

$$2\alpha\cos.\Phi = 4\sin.\Phi\cos.\Phi = 2\sin.2\Phi \text{ et}$$

$$1-\alpha\alpha = 1-4\sin.\Phi^2 = 2\cos.2\Phi-1,$$

ideoque

$$A\ \text{tang.}\,\frac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} = A\ \text{tang.}\,\frac{2\sin.2\Phi}{2\cos.2\Phi-1}. \quad \text{At}$$

$$A\ \text{tang.}\,\frac{2\sin.2\Phi}{2\cos.2\Phi-1} = A\ \text{tang.}\,\frac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} + A\ \text{tang.}\,\frac{\sin.2\Phi}{2-\cos.2\Phi}$$

ideoque

$$A\ \text{tang.}\,\frac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} = 2\Phi + A\ \text{tang.}\,\frac{\sin.2\Phi}{2-\cos.2\Phi},$$

vnde

vnde colligitur:

$$P = 2\Phi \operatorname{coſ.} \Phi + \operatorname{coſ.} \Phi . A \operatorname{tang.} \frac{\operatorname{ſin.} 2\Phi}{2 - \operatorname{coſ.} 2\Phi}$$
$$- \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin.} \Phi\, l (1 + 2\alpha^2 \operatorname{coſ.} 2\Phi + \alpha^4).$$

Reducatur nunc vlterius valor Q, ſubſtituendo loco p et q eorum valores, eritque

$$Q = \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} \Phi\, l (1 + \alpha\alpha pp) + \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi\, l (1 + \alpha\alpha pp)$$
$$- \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} \Phi\, l (1 + \alpha\alpha qq) + \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi\, l (1 + \alpha\alpha qq),$$

ſiue contractis logarithmis

$$Q = \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} \Phi\, l \frac{1 + \alpha\alpha pp}{1 + \alpha\alpha qq} + \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi\, l (1 + \alpha\alpha pp)(1 + \alpha\alpha qq),$$

cuius expreſſionis vtramque partem iterum ſeorſim tractemus.

Quod priorem partem attinet ea ſtatim hoc modo repraeſentari poteſt:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} \Phi\, l \frac{1 + \alpha\alpha \operatorname{coſ.} 2\Phi + \alpha\alpha \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi}{1 + \alpha\alpha \operatorname{coſ.} 2\Phi - \alpha\alpha \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi},$$

ſiue etiam hoc modo:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} \Phi\, l \frac{1 + \frac{\alpha\alpha \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi}{1 + \alpha\alpha \operatorname{coſ.} 2\Phi}}{1 - \frac{\alpha\alpha \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi}{1 + \alpha\alpha \operatorname{coſ.} 2\Phi}}.$$

Nouimus autem eſſe

$$l \frac{1 + t\sqrt{-1}}{1 - t\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\, A \operatorname{tang.} t,$$

vnde haec pars hanc induet formam e logarithmica in circularem expreſſionem conuerſam:

$$\sqrt{-1} \operatorname{coſ.} \Phi\, A \operatorname{tang.} \frac{\alpha\alpha \operatorname{ſin.} 2\Phi}{1 + \alpha\alpha \operatorname{coſ.} 2\Phi},$$

quem porro arcum in hos duos reſoluere licet:

$$\sqrt{-1} \operatorname{coſ.} \Phi \left(A \operatorname{tang.} \frac{\operatorname{ſin.} 2\Phi}{\operatorname{coſ.} 2\Phi} + A \operatorname{tang.} \frac{-\operatorname{ſin.} 2\Phi}{\operatorname{coſ.} 2\Phi + \alpha\alpha} \right),$$

ſiue

ſiue

$$\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\Phi\left(2\Phi - \text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,2\Phi}{2-\text{coſ.}\,2\Phi}\right)$$

ob $\alpha\alpha = 4\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = 2 - 2\,\text{coſ.}\,2\Phi$.

Altera pars valoris Q erit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi\, l\,(1 + \alpha\alpha(pp+qq) + \alpha^4 ppqq),$$

quae ergo ob $pp + qq = 2\,\text{coſ.}\,2\Phi$ et $pq = 1$, abit in

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi + \alpha^4).$$

Collectis ergo his membris erit

$$Q = 2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,2\Phi}{2-\text{coſ.}\,2\Phi}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi + \alpha^4).$$

Cum igitur eſſe debeat

$2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{-1}}$, erit

$$2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,2\Phi}{2-\text{coſ.}\,2\Phi}$$
$$+ \Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{A tang.}\,\frac{\text{ſin.}\,2\Phi}{2-\text{coſ.}\,2\Phi}$$
$$- \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi + \alpha^4)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi + \alpha^4).$$

Sicque etiam per hanc Analyſin prorſus ſingularem convincimur, ſummam ſeriei:

$$2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,3\Phi - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,4\Phi + \text{etc.}$$

reuera eſſe $= 2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV GLOBI CIRCA AXEM OBLIQVVM QVEMCVNQVE GYRANTIS ET SVPER PLANO HORIZONTALI INCEDENTIS.

Auctore
L. EVLERO.

Cum in omnibus quae hactenus de motu globorum ſuper planis ſunt tradita alius motus gyratorius non ſit conſideratus, niſi qui fiat circa axem ad motus directionem normalem; quaeſtio ſupereſt maxime ardua: quomodo globus, cui circa axem quemcunque obliquum fuerit impreſſus motus gyratorius, ſuper plano ſit progreſſurus; quoniam principia, ex quibus huiusmodi motus determinari oportet, neutiquam adhuc ſatis ſunt euoluta, vt ad quosuis caſus, qui occurrere poſſunt, applicari queant. Primus equidem haec principia in Tractatu meo de motu corporum ſolidorum ſeu rigidorum iſta principia in lucem produxi, indeque plurima motus Phoenomena explicaui, quae principiis mechanicis vulgaribus prorſus erant inacceſſa. Quin etiam in vltimo huius libri capite hoc ipſum argumentum de globo ſuper plano horizontali incedente,

 dum

dum interea circa axem obliquum quemcunque gyratur, omnio ſtudio ſum perſcrutatus. Verum quia hic liber in paucorum manibus verſatur, ac iſta ipſa tractatio pleriſque Geometris etiamnunc videtur incognita; haud abs re fore arbitror, ſi totum hoc argumentum hic denuo in lucem protraxero, prouti in loco memorato eſt pertractatum, vbi quidem nonnullas dilucidationes, ſi opus fuerit viſum, adiungam, quo vniuerſa Theoria globorum ſuper plano horizontali vtcunque propulſorum completa reddatur. In hac autem inueſtigatione imprimis ad effectum frictionis eſt reſpiciendum, quandoquidem remota frictione globus perpetuo eundem motum tam progreſſiuum quam gyratorium, ſine vlla alteratione, eſſet conſeruaturus. Frictionem autem eodem modo in calculum introducam, quo hactenus a Geometris tractari eſt ſolita. Quanquam enim forte omnia frictionis ſymptomata nondum fuerint penitus perſpecta: tamen iſta tractatio inde nullam mutationem pati eſt cenſenda; quoniam praecipuum negotium hic in euolutione abſtruſiſſimorum principiorum mechanicae ſublimioris et in integratione plurium formularum differentialium alias difficillimarum abſoluitur.

Problema I.

§. 1. *Si globus ſuper plano horizontali vtcunque tam motu progreſſiuo quam gyratorio moueatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit ſuperficiem horizontalem.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. Sit I centrum globi, ſimulque eius centrum inertiae eiusque radius ſit $= f$, et contactus ſiat in puncto imo T, motus

motus autem globi ita ſit comparatus, vt centrum inertiae moueatur ſecundum directionem P I R celeritate $= v$, ſimul vero gyretur circa axem quemcunque I O celeritate angulari $= \varepsilon$, in eum ſenſum, vt punctum T circa O incedat per arculum T t, ac pro poſitione puncti O ſtatuamus angulum P T O $= \theta$ et arcum T O $= s$, vbi quidem arcus ita ſumo, quaſi radius globi eſſet $= 1$. Ducatur T V ipſi P I R parallela, ac ſi motus gyratorius abeſſet, punctum contactus T raſurum eſſet planum horizontale celeritate v in directione T V. Deinde ſi globus ſolo motu gyratorio ferretur, punctum T per T t moueretur celeritate $f\varepsilon$ ſin. T O $= f\varepsilon$ ſin s, cuius directio cum ſit horizontalis, in plano per rectam T Θ referatur, ita vt ſit angulus S T Θ $=$ P T $t = \theta - 90°$, ob O T t rectum. Erit ergo V T $\theta = 270° - \theta$. Capiantur rectae T V $= v$ et T Θ $= f\varepsilon$ ſin. s, et quia punctum T his duobus motibus coniunctim mouetur, eius verus motus fiet ſecundum rectam T F, diagonalem parallelogrammi T V F Θ. Ex F ad T V ducta normali F H, erit V H $= f\varepsilon$ ſin. s ſin. θ et F H $= - f\varepsilon$ ſin. s coſ. θ, vnde fit F H $= v - f\varepsilon$ ſin. s ſin. θ atque celeritas radens

$$\text{T F} = \surd\,(v\,v - 2\,f\varepsilon\,v \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\theta + f\,f\,\varepsilon\,\varepsilon \,\text{ſin.}\, s^2) \text{ et}$$

$$\text{tang. V T F} = \frac{-f\varepsilon \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\,\theta}{v - f\varepsilon \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\,\theta}.$$

Ducatur ex centro I ipſi T F parallela I Q, erit arcus T Q quadrans, et angulus R T Q $=$ V T F; quare ſi I Q ſit directioni, ſecundum quam punctum T radit, parallela, erit

$$\text{tang. P T Q} = \frac{f\varepsilon \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\,\theta}{v - f\varepsilon \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\,\theta},$$

ac poſita celeritate radente

$\sqrt{(vv - 2f\aleph v \text{ſin.}\, s \text{ ſin.}\, \theta + ff\aleph^2 \text{ ſin.}\, s^2)} = u$, erit
$\text{ſin.}\, PTQ = -\frac{f\aleph \text{ ſin.}\, s \text{ coſ.}\, \theta}{u}$ et
$\text{coſ.}\, PTQ = \frac{f\aleph \text{ ſin.}\, s \text{ ſin.}\, \theta - v}{u}$.

Corollarium 1.

§. 2. Fieri ergo poteſt, vt celeritas radens ideoque et attritus euaneſcat, quo caſu hae duae aequationes locum habere debent: altera $\aleph \text{ ſin.}\, s \text{ coſ.}\, \theta = 0$, altera vero $v = f\aleph \text{ ſin.}\, s \text{ ſin.}\, \theta$. Vnde ſtatim patet, ſi nullus adſit motus progreſſiuus, ſeu $v = 0$, nullum attritum affore ſi $\text{ſin.}\, s = 0$, hoc eſt ſi globus circa axem verticalem ZT gyretur.

Corollarium 2.

§. 3. Deinde motus globi ab attritu erit liber, ſi fuerit primo $\text{coſ.}\, \theta = 0$, ſeu angulus PTO rectus: deinde celeritas progreſſiua v ad angularem $\aleph$ hanc relationem tenere debet, vt ſit $v = f\aleph \text{ ſin.}\, s$, ſeu $TV = T\Theta$, et angulus $ST\Theta = 0$.

Corollarium 3.

§. 4. Quando ergo globus huiusmodi motum eſt conſecutus, quia ſublato omni attritu etiam nulla adeſt frictio, globus eundem motum conſtanter conſeruabit, ſiquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

Scholion 1.

§. 5. Quemadmodum hic frictionem conſtituimus, ea non obſtat, quominus globus ſuper plano horizontali motum

motum ſuum intemeratum conſeruari poſſit, quod tamen minime fieri obſeruamus, cum globus ſuper tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cuius rei cauſſa reſiſtentiae aëris tribui nequit. Verum hic primum animaduerto, experimenta Theoriae nunquam perfectiſſime congruere: veluti dum caſu hic tractato aſſumſimus, contactum vnico fieri puncto, id ſemper in praxi ſecus euenit. Interim tamen ſi arcus T O eſt quadrans et P T O $= 90°$, exiſtente $v = f\vartheta$, etſi contactus non fiat in vnico puncto, tamen attritus euaneſcet, ideoque haec motus extinctio frictioni neutiquam adſcribi poteſt. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, vti hic eam definiuimus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora ſuper ſuperficiebus incedunt, a frictione probe diſtinguendum, cuius ratio vtcunque fuerit comparata, eius effectus potius ſeorſim inueſtigari conuenit, quam frictionis indolem hic ſtabilitam immutari. Et quemadmodum hic a reſiſtentia aëris mentem abſtrahimus ita etiam licebit hoc obſtaculum frictionem concomitans a praeſenti argumento ſeiungere.

Scholion 2.

§. 6. Corpora hic ſphaerica conſidero, in quorum centro ſitum ſit ipſorum centrum inertiae I, quod ergo ipſum etiam in plano horizontali moueatur, et puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat; ex quo patet, preſſionem in contactu ſemper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia vniformi conſtaret, omnes eius diametri proprietate axium principalium gauderent. Sed concipiamus materiae diſtributionem vtcun-

vtcunque inaequabilem, ita tamen vt centrum inertiae cadat in centrum figurae: hocque pacto neceſſe erit in globo ternos axes principales conſiderari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a ſe inuicem distantia, quorum reſpectu ſint momenta inertiae M aa, M bb, M cc. Quanquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter ſe aequalia ſtatuemus, tamen conueniet tria huiusmodi puncta in ſuperficie fixa notaſſe, quo ex eorum relatione ad ſpatium abſolutum facilius motus globi definiri poſſit. Conſtitutis autem in globis his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam T t dirigi aſſumimus, ſenſum habet C B A, contrarium ei quem ſupra ſtatuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc caſum celeritatem angularem ϑ vt negatiuam ſpectare debemus.

Problema II.

§. 7. *Si globus ſuper plano horizontali vtcunque moueatur, definire vires, quibus ſollicitatur, earumque momenta reſpectu ternorum axium principalium globi.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 2. Incluſus concipiatur globus Sphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progreſſiuum habenti, in qua Z ſit punctum verticale eiusque oppoſitum T punctum contactus, D E vero ſit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens et D P Q E circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapſo tempore t moueatur globus motu progreſſiuo ſecundum directionem P I celeritate $= v$, ponaturque arcus D P, ſeu angulus D Z P $= \varphi$; axes autem prin-

principales nunc ſint in A, B, C. Tum vero globus iam gyretur circa axem I O, celeritate angulari $= \aleph$ in ſenſum A C B, ſitque pro ſitu puncti O angulus P T O ſeu $PZO = \theta$ et arcus $ZO = s$. Etſi enim ante arcum T O poſuimus $= s$, quia tantum eius ſinus in computum intrat, perinde eſt. Erit ergo angulus $DZO = \theta + \Phi$ et $EZO = 180° - \theta - \Phi$. Deinde a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum maximorum ducti concipiantur, ſintque hi arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$ et anguli $EZA = \lambda$, $EZB = \mu$, $EZC = \nu$. In praecedente autem problemate oſtendimus, punctum contactus T planum ſubiectum radere ſecundum directionem radio IQ parallelam celeritate $= \sqrt{(vv - 2f\aleph v \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta + ff\aleph\aleph \,\text{ſin.}\, s^2)}$, foreque

$$\text{tang.}\, PTQ = \text{tang.}\, PZQ = \frac{f\aleph \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, \theta}{v - f\aleph \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta},$$

denotante f radium globi. Cum igitur preſſio in T ſit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T eſt applicata ſecundum directionem ipſi Q I parallelam. Hac ergo vi reſoluta ſecundum directiones axium principalium I A, I B, I C, prodibunt ternae vires, quae in puncto T applicatae ſunt concipiendae, ex quibus porro colliguntur ſequentia momenta:

Reſpectu axis I A in ſenſum B C:

$$-\delta Mf \,\text{coſ.}\, CQ \,\text{coſ.}\, BT + \delta Mf \,\text{coſ.}\, BQ \,\text{coſ.}\, CT = P.$$

Reſpectu axis I B in ſenſum C A:

$$-\delta Mf \,\text{coſ.}\, AQ \,\text{coſ.}\, CT + \delta Mf \,\text{coſ.}\, CQ \,\text{coſ.}\, AT = Q.$$

Reſpectu axis I C in ſenſum A B:

$$-\delta Mf \,\text{coſ.}\, BQ \,\text{coſ.}\, AT + \delta Mf \,\text{coſ.}\, AQ \,\text{coſ.}\, BT = R,$$

 erunt

erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta M f (\text{coſ.}\, m\, \text{coſ.}\, CQ - \text{coſ}\, n\, \text{coſ.}\, BQ)$$

$$Q = \delta M f (\text{coſ.}\, n\, \text{coſ.}\, AQ - \text{coſ.}\, l\, \text{coſ.}\, CQ)$$

$$R = \delta M f (\text{coſ.}\, l\, \text{coſ.}\, BQ - \text{coſ.}\, m\, \text{coſ.}\, AQ).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum $PZQ = \xi$, vt ſit

$$\text{tang.}\, \xi = \frac{f \vartheta\, \text{ſin.}\, s\, \text{coſ.}\, \theta}{v - f \vartheta\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, \theta}$$

et poſita celeritate radente

$$\surd (v v - 2 f v \vartheta\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, \theta + f f \vartheta \vartheta\, \text{ſin.}\, \theta^2 = u, \text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\, \xi = \frac{- f \vartheta\, \text{ſin.}\, s\, \text{coſ.}\, \theta}{u} \text{ et coſ.}\, \xi = \frac{f \vartheta\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, \theta - v}{u}.$$

Fit ergo $DZQ = \Phi + \xi$ et $EZQ = 180^\circ - \Phi - \xi$, hinc $AZQ = 180^\circ - \xi - \Phi - \lambda$; $BZQ = \mu + \xi + \Phi - 180^\circ$; ergo

$$\text{coſ.}\, AQ = - \text{coſ.}\, (\xi + \Phi + \lambda)\, \text{ſin.}\, l$$

$$\text{coſ.}\, BQ = - \text{coſ.}\, (\xi + \Phi + \mu)\, \text{ſin.}\, m$$

$$\text{coſ.}\, CQ = - \text{coſ.}\, (\xi + \Phi + \nu)\, \text{ſin.}\, n.$$

Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:

$$P = \delta M f\, \text{ſin.}\, l \times \text{ſin.}\, (\lambda + \Phi + \xi)$$

$$Q = \delta M f\, \text{ſin.}\, m \times \text{ſin.}\, (\mu + \Phi + \xi)$$

$$R = \delta M f\, \text{ſin.}\, n \times \text{ſin.}\, (\nu + \Phi + \xi).$$

Pro-

Problema III.

§. 8. *Si motum gyratorium ad quoduis tempus vt datum ſpectemus, definire motum progreſſiuum globi.*

Solutio.

Quia centrum globi in plano horizontali mouetur, deſcripſerit id tempore t lineam G I, quae referatur ad directionem G X ſuperiori directioni fixae D E parallelam, ductaque I X ad G X normali, ſint coordinatae G X = X, X Y = Y. Per I ducatur recta D E ipſi G X parallela, quae erit ipſa diameter D E (fig. 2). Ducatur I P, ita vt ſit angulus D I P = E I R = Φ, et centrum I per hypotheſin progreditur in directione I R celeritate $= v$, ita vt ſit celeritas ſecundum G X $= v$ coſ. Φ et celeritas ſecundum X I $= v$ ſin. Φ, ideoque $dX = v\,dt$ coſ. Φ et $dY = v\,dt$ ſin Φ. Ducatur recta Q I S, ita vt I Q ſit directioni, qua punctum contactus radit, parallela, erit angulus E I Q = D I S = $180^\circ - \xi - \Phi$; (eſt enim aequalis angulo F Z Q in praecedente figura) vnde globus ſollicitari cenſendus eſt vi $= \delta M$ in directione I S. Hinc ergo oritur vis ſecundum I D $= -\delta M$ coſ. $(\xi + \Phi)$ et vis ſecundum X I $= \delta M$ ſin. $(\xi + \Phi)$, ex quibus colligitur Tab. IV. Fig. 3.

$$\frac{d.\,v\,\text{coſ}.\,\Phi}{2g\,dt} = \frac{dv\,\text{coſ}.\,\Phi - v\,d\Phi\,\text{ſin}.\,\Phi}{2g\,dt} = \delta\,\text{coſ}.\,(\xi + \Phi)$$

$$\frac{d.\,v\,\text{ſin}.\,\Phi}{2g\,dt} = \frac{dv\,\text{ſin}.\,\Phi + v\,d\Phi\,\text{coſ}.\,\Phi}{2g\,dt} = \delta\,\text{ſin}.\,(\xi + \Phi)$$

hincque porro

$$\frac{dv}{2g\,dt} = \delta\,\text{coſ}.\,\xi \text{ et } \frac{v\,d\Phi}{2g\,dt} = \delta\,\text{ſin}.\,\xi,$$

 ita

ita vt ſit

$$\frac{v\, d\Phi}{dv} = \text{tang.}\, \xi = \frac{f \mathfrak{v}\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, \theta}{v - f \mathfrak{v}\, \text{ſin.}\, s\, \text{ſin.}\, \theta}.$$

Problema IV.

§. 9. *Definito motu progreſſiuo globi, determinare eius motum gyratorium.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 2. Spectetur nunc centrum globi I vt quieſcens, et maneant omnes denominationes in Problemate II adhibitae, ſintque M aa, M bb, M cc momenta inertiae reſpectu axium principalium IA, IB, IC, quae primo vt inaequalia conſideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem $\mathfrak{v}$ vt negatiuam ſpectare debemus, quia tendit in ſenſum ACB, ſi ponamus $\mathfrak{v}\, \text{coſ.}\, \alpha = x$, $\mathfrak{v}\, \text{coſ.}\, \beta = y$, et $\mathfrak{v}\, \text{coſ.}\, \gamma = z$, in formulis generalibus has litteras x, y, z negatiue ſumi oportet, quo facto ex § 810. Theoriae meae motus corporum ſolidorum deducuntur hae aequationes motum determinantes:

$$dx + \frac{bb-cc}{aa} yz\,dt + \frac{2\delta fg}{aa} dt\, \text{ſin.}\, l\, \text{ſin.}\, (\lambda + \Phi + \xi) = 0;$$

$$dy + \frac{cc-aa}{bb} xz\,dt + \frac{2\delta fg}{bb} dt\, \text{ſin.}\, m\, \text{ſin.}\, (\mu + \Phi + \xi) = 0;$$

$$dz + \frac{aa-bb}{cc} xy\,dt + \frac{2\delta fg}{cc} dt\, \text{ſin.}\, n\, \text{ſin.}\, (\nu + \Phi + \xi) = 0;$$

$$dl\, \text{ſin.}\, l = dt\, (z\, \text{coſ.}\, m - y\, \text{coſ.}\, n);$$

$$dm\, \text{ſin.}\, m = dt\, (x\, \text{coſ.}\, n - z\, \text{coſ.}\, l);$$

$$dn\, \text{ſin.}\, n = dt\, (y\, \text{coſ.}\, l - x\, \text{coſ.}\, m);$$

$$d\lambda\, \text{ſin.}\, l^2 = dt\, (y\, \text{coſ.}\, m + z\, \text{coſ.}\, n);$$

$$d\mu\, \text{ſin.}\, m^2 = dt\, (z\, \text{coſ.}\, n + x\, \text{coſ.}\, l);$$

$$d\nu\, \text{ſin.}\, n^2 = dt\, (x\, \text{coſ.}\, l + y\, \text{coſ.}\, m).$$

Tum

Tum vero ex motu progreſſiuo habemus

$$d v = 2\delta g d t \text{ coſ. } \xi,$$

$$v d \Phi = 2\delta g d t \text{ ſin. } \xi \text{ et}$$

$$\text{tang. } \xi = \frac{f\, \text{ſin. } s \text{ coſ. } \theta}{v - f\, \text{ſin. } s \text{ coſ. } \theta},$$

vbi eſt $PZO = \theta$ et $ZO = s$. Cum ergo ſit angulus $EZO = 180° - \theta - \Phi$, erit $AZO = 180° - \lambda - \theta - \Phi$: hincque

$$\text{coſ. } \alpha = \text{coſ. } l \text{ coſ. } s - \text{ſin. } l \text{ ſin. } s \text{ coſ. } (\lambda + \theta + \Phi)$$

$$\text{coſ. } \beta = \text{coſ. } m \text{ coſ. } s - \text{ſin. } m \text{ ſin. } s \text{ coſ. } (\mu + \theta + \Phi)$$

$$\text{coſ. } \gamma = \text{coſ. } n \text{ coſ. } s - \text{ſin. } n \text{ ſin. } s \text{ coſ. } (\nu + \theta + \Phi),$$

exiſtente

$$\text{coſ. } s = \text{coſ. } l \text{ coſ. } \alpha + \text{coſ. } m \text{ coſ. } \beta + \text{coſ. } n \text{ coſ. } \gamma,$$

vnde ſequitur fore

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ſin. } l \text{ coſ. } l \text{ coſ. } (\lambda + \theta + \Phi) \\ + \text{ſin. } m \text{ coſ. } m \text{ coſ. } (\mu + \theta + \Phi) \\ + \text{ſin. } n \text{ coſ. } n \text{ coſ. } (\nu + \theta + \Phi) \end{array}\right\} = 0.$$

Ponamus $\mathfrak{v} \text{ coſ. } s = p$ et $\mathfrak{v} \text{ ſin. } s = q$ ita vt ſit

$$\text{tang. } \xi = \frac{f q \text{ coſ. } \theta}{v - f q \text{ ſin. } \theta} = \frac{v d \Phi}{d v},$$

eritque

$$x = p \text{ coſ. } l - q \text{ ſin. } l \text{ coſ. } (\lambda + \theta + \Phi),$$

$$y = p \text{ coſ. } m - q \text{ ſin. } m \text{ coſ. } (\mu + \theta + \Phi),$$

$$z = p \text{ coſ. } n - q \text{ ſin. } n \text{ coſ. } (\nu + \theta + \Phi),$$

ex quibus valoribus fit

$$d l = q d t \text{ ſin. } (\lambda + \theta + \Phi);$$

$$d m = q d t \text{ ſin. } (\mu + \theta + \Phi);$$

$$d n = q d t \text{ ſin. } (\nu + \theta + \Phi);$$

$$d \lambda = p d t + q d t \text{ cot. } l \text{ coſ. } (\lambda + \theta + \Phi);$$

$$d \mu = p d t + q d t \text{ cot. } m \text{ coſ. } (\mu + \theta + \Phi);$$

$$d \nu = p d t + q d t \text{ cot. } n \text{ coſ. } (\nu + \theta + \Phi);$$

P 3 inde-

indeque porro

$$dx = dp \operatorname{coſ.} l - dq \operatorname{ſin.} l \operatorname{coſ.} (\lambda + \theta + \Phi) + q(d\theta + d\Phi) \operatorname{ſin.} l \operatorname{ſin.} (\lambda + \theta + \Phi),$$

$$dy = dp \operatorname{coſ.} m - dq \operatorname{ſin.} m \operatorname{coſ.} (\mu + \theta + \Phi) + q(d\theta + d\Phi) \operatorname{ſin.} m \operatorname{ſin.} (\mu + \theta + \Phi),$$

$$dz = dp \operatorname{coſ.} n - dq \operatorname{ſin.} n \operatorname{coſ.} (\nu + \theta + \Phi) + q(d\theta + d\Phi) \operatorname{ſin.} n \operatorname{ſin.} (\nu + \theta + \Phi),$$

At ſine ſubſidio harum ſubſtitutionum ex aequationibus ternis primis cum in genere ſit

$$\operatorname{ſin.} l \operatorname{coſ.} l \operatorname{ſin.} (\lambda + A) + \operatorname{ſin.} m \operatorname{coſ.} m (\mu + A) + \operatorname{ſin.} n \operatorname{coſ.} n \operatorname{ſin.} (\nu + A) = 0,$$

elicimus hanc aequationem:

$$\left.\begin{matrix} aa\,dx \operatorname{coſ.} l + bb\,dy \operatorname{coſ.} m + cc\,dz \operatorname{coſ.} n \\ - aa\,x\,dl \operatorname{ſin.} \lambda - bb\,y\,dm \operatorname{ſin.} m - cc\,z\,dn \operatorname{ſin.} n \end{matrix}\right\} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$aa\,x \operatorname{coſ.} l + bb\,y \operatorname{coſ.} m + cc\,z \operatorname{coſ.} n = C,$$

quae aequatio, adhibitis ſubſtitutionibus, abit in hanc:

$$\left.\begin{matrix} p(aa \operatorname{coſ.} l^2 + bb \operatorname{coſ.} m^2 + cc \operatorname{coſ.} n^2) \\ - qaa \operatorname{ſin.} l \operatorname{coſ.} l \operatorname{coſ.} (A + \theta + \Phi) \\ - qbb \operatorname{ſin.} m \operatorname{coſ.} m \operatorname{coſ.} (\mu + \theta + \Phi) \\ - qcc \operatorname{ſin.} n \operatorname{coſ.} n \operatorname{coſ.} (\nu + \theta + \Phi) \end{matrix}\right\} = \text{Conſt.}$$

Deinde etiam per reductiones §. 934. Theoriae meae traditas pro vi viua colligitur haec aequatio differentialis:

$$aa\,x\,dx + bb\,y\,dy + cc\,z\,dz = 2\delta f g q\,dt \operatorname{ſin.} (\xi - \theta).$$

Scholion.

§. 10. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis traditis, vbi angulos μ et ν per l, λ, m, n expres-

preſſimus, notari conuenit fieri

$$\text{coſ.}(\mu+\theta+\Phi) = \frac{-\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,m\,\text{coſ.}(\lambda+\theta+\Phi)+\text{coſ.}\,n\,\text{ſin.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,m},$$

$$\text{coſ}\,(\nu+\theta+\Phi) = \frac{-\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,n\,\text{coſ.}(\lambda+\theta+\Phi)-\text{coſ.}\,m\,\text{ſin.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,m},$$

$$\text{ſin.}(\mu+\theta+\Phi) = \frac{-\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,m\,\text{ſin.}(\lambda+\theta+\Phi)-\text{coſ.}\,n\,\text{coſ.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,m},$$

$$\text{ſin.}\,(\nu+\theta+\Phi) = \frac{-\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,n\,\text{ſin.}(\lambda+\theta+\Phi)+\text{coſ.}\,m\,\text{coſ.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,n}.$$

Ac ſimili modo anguli $\mu+\Phi+\xi$ et $\nu+\Phi+\xi$ ad angulum $\lambda+\Phi+\xi$ reuocari poſſunt. Deinde etiam pro ſequentibus reductionibus haec forma imprimis eſt notanda:

$$\text{ſin.}\,(\mu+B)\,\text{coſ.}\,(\nu+C) = \text{ſin.}\,(\nu+B)\,\text{coſ.}(\mu+C),$$

quae ob

$$\text{ſin.}\,M\,\text{coſ.}\,N = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(M+N) + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(M-N),$$

reducitur ad

$$\text{ſin.}\,(\mu-\nu)\,\text{coſ.}\,(B-C);$$

hocque modo reductionem pro aliis formulis inſtituendo, reperiemus:

$$\text{ſin}\,(\mu+B)\,\text{coſ}\,(\nu+C) - \text{ſin.}(\nu+B)\,\text{coſ.}(\mu+C)$$
$$= \text{ſin.}\,(\mu-\nu)\,\text{coſ.}\,(B-C),$$

$$\text{ſin.}(\mu+B)\,\text{ſin.}(\nu+C) - \text{ſin.}\,(\nu+B)\,\text{ſin.}\,(\mu+C)$$
$$= -\,\text{ſin.}\,(\mu-\nu)\,\text{ſin.}\,(B-C),$$

$$\text{coſ.}(\mu+B)\,\text{coſ}\,(\nu+C) - \text{coſ}\,(\nu+B)\,\text{coſ.}(\mu+C)$$
$$= -\,\text{ſin.}\,(\mu-\nu)\,\text{ſin.}\,(B-C),$$

vbi ſin $(\mu-\nu)$ per formulas vſurpatas datur: eſt enim ſ
ſin. $(\mu-\nu) = \frac{\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n}$.

Problema V.

§. 11. *Si globus ex materia vniformi conſtet, vel ſaltem ita fuerit comparatus, vt omnia momenta inertiae ſint*

inter

inter ſe aequalia, eique initio impreſſus fuerit motus quicunque, determinare eius continuationem.

Solutio.

Cum hic ſit $aa = bb = cc$, ſeu momentum inertiae reſpectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Conſt. vnde p erit quantitas conſtans. Statuatur ergo $p = h$, et ternae aequationes priores hanc induent formam:

$$\text{I.}\ -dq\,\text{coſ.}(\lambda+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\,\text{ſin.}(\lambda+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\,\text{ſin.}(\lambda+\varphi+\xi) = 0,$$

$$\text{II.}\ -dq\,\text{coſ.}(\mu+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\,\text{ſin.}(\mu+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\,\text{ſin.}(\mu+\varphi+\xi) = 0,$$

$$\text{III.}\ -dq\,\text{coſ.}(\nu+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\,\text{ſin.}(\nu+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\,\text{ſin.}(\nu+\varphi+\xi) = 0,$$

quarum autem ſufficit binas conſideraſſe, quia iam inde nata eſt concluſio $p = h$. Iam per ſuperiores reductiones binae poſteriores aequationes ita combinentur:

$$\text{II.}\ \text{coſ.}(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\ \text{coſ.}(\mu+\theta+\varphi)$$

quae combinatio praebet

$$q(d\theta+d\varphi)\,\text{ſin.}(\mu-\nu) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\,\text{ſin.}(\mu-\nu)\,\text{coſ.}(\xi-\theta) = 0,$$

ſeu

$$q(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\,\text{coſ.}(\xi-\theta) = 0.$$

Deinde combinatio

$$\text{II.}\ \text{ſin.}(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\ \text{ſin.}(\mu+\theta+\varphi)\ \text{dat}$$

dq

$$d q \text{ ſin.} (\mu - \nu) - \frac{2 \delta f g}{a a} d t \text{ ſin.} (\mu - \nu) \text{ ſin.} (\xi - \theta) = 0$$

ſeu

$$d q = \frac{2 \delta f g}{a a} d t \text{ ſin.} (\xi - \theta),$$

qui valor in vltima aequatione pro viribus viuis ſubſtitutus praebet

$$x d x + y d y + z d z = q d q, \text{ hincque}$$

$$x x + y y + z z = s s = \text{conſt.} + q q = \text{conſt.} + s s \text{ ſin.} s^2$$

ita vt ſit $s s \text{ coſ.} s^2$ quantitas conſtans, vti iam inuenimus, ob $s \text{ coſ.} s = p = h$. Hinc iſtas habemus aequationes a litteris l, m, n, λ, μ, ν immunes:

$$\text{I. } q (d \theta + d \phi) + \frac{2 \delta f g}{a a} d t \text{ coſ.} (\xi - \theta) = 0,$$

$$\text{II. } d q = \frac{2 \delta f g}{a a} d t \text{ ſin.} (\xi - \theta) = 0,$$

$$\text{III. } d v = 2 \delta g d t \text{ coſ.} \xi,$$

$$\text{IV. } v d \phi = 2 \delta g d t \text{ ſin.} \xi,$$

quibus adiungatur haec finita: $\text{tang.} \xi = \frac{f q \text{ coſ.} \theta}{v - f q \text{ ſin.} \theta}$, quae in hanc transformata:

$$v \text{ ſin.} \xi - f q \text{ coſ.} (\xi - \theta) = 0,$$

differentietur, prodibitque

$$d v \text{ ſin.} \xi + v d \xi \text{ coſ.} \xi - f d q \text{ coſ.} (\xi - \theta) + f q d \xi \text{ ſin.} (\xi - \theta)$$
$$- f q d \theta \text{ ſin.} (\xi - \theta) = 0.$$

Iam combinatio:

$$\text{I. ſin.} (\xi - \theta) + \text{II. coſ.} (\xi - \theta) \text{ dat}$$

$$q (d \theta + d \phi) \text{ ſin.} (\xi - \theta) + d q \text{ coſ.} (\xi - \theta) = 0,$$

quae aequatio per f multiplicata illi addatur, fietque

$$d v \text{ ſin.} \xi + v d \xi \text{ coſ.} \xi + f q (d \xi + d \phi) \text{ ſin.} (\xi - \theta) = 0.$$

Porro ob $\frac{dv}{v\,d\Phi} = \frac{coſ.\,\xi}{ſin.\,\xi}$ erit

$$v\,(d\varphi + d\xi)\,coſ\,\xi + fq\,(d\Phi + d\xi)\,ſin.\,(\xi - \theta) = 0,\ ſeu$$

$$(d\varphi + d\xi)\,(v\,coſ.\,\xi + fq\,ſin.\,(\xi - \theta)) = 0,$$

quorum factorum finitus: $v\,coſ.\,\xi + fq\,ſin.\,(\xi - \theta)$, euaneſcere nequit ob

$$v\,ſin.\,\xi - fq\,coſ.\,(\xi - \theta) = 0,$$

ſequeretur enim inde $v\,coſ.\,\theta = 0$ et $fq\,coſ.\,\theta = 0$, quod non niſi caſu $\theta = 90°$ locum habet. Relinquitur ergo vt ſit $d\varphi + d\xi = 0$, ideoque $\varphi + \xi$ conſtans. Hoc impetrato reliqua non difficulter expedientur. Ad integrationes autem determinandas pro ſtatu initiali $t = 0$, ponamus fuiſſe celeritatem progreſſiuam $v = e$, $\varphi = 0$, $PZO = \theta = \mathfrak{h}$; $ZO = s = \mathfrak{f}$ et celeritatem angularem $\vartheta = \varepsilon$ in ſenſum ACB; hinc erit $p = b = \varepsilon\,coſ.\,\mathfrak{f}$ et $q = \varepsilon\,ſin.\,\mathfrak{f}$; porro

$$tang\,\xi = \frac{\varepsilon f\,ſin.\,\mathfrak{f}\,coſ.\,\mathfrak{h}}{e - \varepsilon f\,ſin.\,\mathfrak{f}\,ſin.\,\mathfrak{h}}.$$

Statuatur

$$\frac{\varepsilon f\,ſin.\,\mathfrak{f}\,coſ.\,\mathfrak{h}}{e - \varepsilon f\,ſin.\,\mathfrak{f}\,ſin.\,\mathfrak{h}} = tang.\,\zeta,$$

vt fuerit initio $\xi = \zeta$, ac perpetuo erit $\xi + \varphi = \zeta$, ita vt angulus $DZQ = \zeta$ maneat conſtans. Quare cum ſit $\xi = \zeta - \Phi$ erit

$$v\,ſin.\,(\zeta - \varphi) = fq\,coſ.\,(\zeta - \theta - \varphi).$$

Supra autem inuenimus:

$$\frac{d.\,v\,coſ.\,\Phi}{2g\,dt} = \delta\,coſ.\,(\xi + \varphi) = \delta\,coſ.\,\zeta \text{ et}$$

$$\frac{d.\,v\,ſin.\,\Phi}{2g\,dt} = \delta\,ſin.\,(\xi + \varphi) = \delta\,ſin.\,\zeta,$$

vnde integrando colligimus:

$$v\,coſ.\,\varphi = e + 2\delta g t\,coſ.\,\zeta \text{ et } v\,ſin.\,\varphi = 2\delta g t\,ſin.\,\zeta,$$

hinc-

hincque

$$v = \sqrt{(ee + 4\delta e g t \,\text{coſ.}\, \zeta + 4\delta\delta g g t t)},$$

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta}{e + 2\delta g t \,\text{coſ.}\, \zeta}, \text{ atque}$$

$$\text{tang.}\, (\zeta - \varphi) = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{e \,\text{coſ.}\, \zeta + 2\delta g t} = \frac{f q \,\text{coſ.}\, \theta}{v - f q \,\text{ſin.}\, \theta} = \text{tang.}\, \xi.$$

Deinde ob $d\Phi = - d\xi$ binae priores aequationes abeunt in

$$\text{I. } q(d\xi - d\theta) = \frac{2\delta f g}{a a} d t \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta).$$

$$\text{II. } d q = \frac{2\delta f g}{a a} d t \,\text{ſin.}\, (\xi - \theta),$$

quarum haec per illam diuiſa dat

$$\frac{d q}{q(d\xi - d\theta)} = \frac{\text{ſin.}\, (\xi - \theta)}{\text{coſ.}\, (\xi - \theta)},$$

qua integrata prodit $q \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta) = \mathbf{C}$, ideoque

$$q \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta) = \varepsilon \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h}),$$

vnde valor ipſius q in prima ſubſtitutus praebet:

$$\frac{\varepsilon (d\xi - d\theta) \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h})}{\text{coſ.}\, (\xi - \theta)^2} = \frac{2\delta f g}{a a} d t,$$

et integrando

$$\varepsilon \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) \,\text{tang.}\, (\xi - \theta) = \mathbf{C} + \frac{2\delta f g}{a a} t,$$

vbi $\mathbf{C} = \varepsilon \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, (\theta - \mathfrak{h})$, at

$$\text{tang.}\, (\xi - \theta) = \text{tang.}\, (\zeta - \varphi - \theta) = \frac{\text{tang.}\, (\zeta - \Phi) - \text{tang.}\, \theta}{1 + \text{tang.}\, (\zeta - \Phi) \,\text{tang.}\, \theta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{\text{tang.}\, \xi - \text{tang.}\, (\xi - \theta)}{1 + \text{tang.}\, \xi \,\text{tang.}\, (\xi - \theta)}.$$

Sed per hypotheſin eſt $\varepsilon \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{f \,\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h})}$, vnde fit

$$\text{tang.}\, (\xi - \theta) = \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f g t}{e a a \,\text{ſin.}\, \zeta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, \xi = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{e \,\text{coſ.}\, \zeta + 2\delta g t},$$

hincque angulus θ facile determinatur: indeque $q = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{f \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta)}$.

Verum hic notari oportet, cum ſit

$$\text{tang.}\ \zeta = \frac{e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}},$$

eſſe vt ſupra de angulo ξ oſtendimus

$$\text{ſin.}\ \zeta = \frac{-e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{\surd(e e - 2 e \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\ \zeta = \frac{-e + \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}}{\surd(e e - 2 \varepsilon e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)}, \text{ vnde}$$

$$\text{coſ.}\ (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{\surd(e e - 2 e \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)}.$$

His inuentis cum ſit $\text{ȣ}\ \text{coſ.}\ s = \varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}$ et $\text{ȣ}\ \text{ſin.}\ s = q$, erit

$$\text{ȣ} = \surd(q q + \varepsilon \varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}^2) \text{ et tang.}\ s = \frac{q}{\varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}}.$$

Sicque tam motus progreſſiuus, quam ad quoduis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari ȣ poterit aſſignari, id quod ad motus cognitionem ſufficit. Determinatio autem ſitus punctorum A, B, C ad quoduis tempus nimis eſt ardua, quam vt eam perficere liceat.

Corollarium 1.

§. 12. Cum ſit celeritas angularis $\text{ȣ} = \frac{\varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}}{\text{coſ.}\ s}$, ſeu coſinui arcus S O reciproce proportionalis; ſequitur ſi polus gyrationis O initio fuerit in ſuperiori hemiſphaerio DZE, eum nunquam in inferius peruenire poſſe; in tranſitu enim per circulum horizontalem D E prodiret celeritas angularis ȣ infinita.

Corollarium 2.

§. 13. Ob eandem rationem, ſi polus gyrationis O initio fuerit in hemiſphaerio inferiori D T E, is nunquam in ſuperius aſcendet; ſin autem initio fuerit in

ipſo

ipſo circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit: ſcilicet ſi initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

Corollarium 3.

§. 14. Si fuerit initio angulus $DZO = \mathfrak{h}$ rectus, fiet $\sin. \zeta = 0$ et ob

$$\text{tang.} (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin. \mathfrak{f} - e \sin. \mathfrak{h}}{e \cos. \mathfrak{h}},$$

erit etiam $\xi - \theta$ rectus. Sed ob $\text{tang.} \xi = \frac{e \sin. \zeta}{e \cos. \zeta + 2 \delta g t}$ angulus ξ euaneſcit, vnde angulus $\theta = PZO$ prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

Corollarium 4.

§. 15. Memorabilis eſt etiam proprietas, quod angulus $\xi + \varphi$, ſeu DZQ, et in fig. 3 angulus DIQ ſit conſtans. Recta enim QIS ſibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progreſſiuo ſollicitatur vi conſtante δM ſecundum eandem directionem IS, curua ab eo deſcripta GI parabola ſit neceſſe eſt.

Scholion 1.

§. 16. Hic autem motus globi, vti noſtris formulis eſt definitus, diutius non durat, quam reuera frictio adeſt, ſeu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eueniat vt raſio ceſſet, ſeu celeritas radens in T euaneſcat, ſubito frictio euaneſcit, formulaeque inuentae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progreſſiuo quam gyratorio vniformiter in di-

rectum progredietur, neque axis gyrationis vllam amplius mutationem patietur. Ac ſi ſtatim initio motus globo impreſſus ita fuerit comparatus, vt frictio fuerit nulla, quod euenit ſi tam εf ſin. f coſ. $\mathfrak{h} = 0$, quam $e = \varepsilon f$ ſin. f ſin. $\mathfrak{h}$, tum etiam globus nullam frictionem ſentiet, et ſtatim ab initio motum progreſſiuum uniformiter in directum proſequetur, ſimulque vniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum ſi corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impreſſus, ſemper aliquo tempore elapſo eo reducetur, vt frictio euaneſcat, indeque motum ſuum vniformiter proſequetur, quod memorabile temporis punctum in ſequenti problemate inueſtigabimus.

Scholion 2.

Tab. IV. Fig. 2. §. 17. Quae in ſolutione problematis elicuimus, huc redeunt: ex motu primum impreſſo habemus celeritatem motus progreſſiui $= e$, ſecundum directionem D I: ac ſi gyretur circa axem I O celeritate angulari ε in ſenſum A C B, ſeu Z E T D, qui ſenſus *antrorſum tendens* dici ſolet, fueritque arcus Z O $=$ f et angulus D Z O $= \mathfrak{h}$: tum vero radius globi ſit $= f$ eiusque momentum inertiae $= M a a$ reſpectu omnium diametrorum, exiſtente M eius maſſa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \sqrt{(e e - 2 \varepsilon e f \text{ ſin. f ſin. } \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f \text{ ſin. f}^2)}$, quae ſi ponatur $= k$, quaeratur angulus D Z Q $= \zeta$, vt ſit

$$\text{ſin. } \zeta = \frac{- \varepsilon f \text{ ſin. f coſ. } \mathfrak{h}}{k} \text{ et coſ. } \zeta = \frac{\varepsilon f \text{ ſin. f ſin. } \mathfrak{h} - e}{k},$$

eritque I Q directio motus radentis. Tum ſi elapſo tempore t globi centrum proferatur celeritate v ſecundum directionem P I, et gyret celeritate angulari $= \vartheta$ in ſenſum

ſum Z E T D circa polum O, ponaturque $DZP = \Phi$, $PZO = \theta$ et $ZO = s$: inuenimus primo

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta}{e + 2\delta g t \,\text{coſ.}\, \zeta}$$

et celeritatem centri $= \sqrt{(ee + 4\delta e g t \,\text{coſ.}\, \zeta + 4\delta\delta g g t t)}$,

at celeritas radens etiamnunc fiet in directione I Q, exiſtente $DZQ = \zeta$; vnde poſito $PZQ = \xi$ erit

$$\text{tang.}\, \xi = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{e \,\text{coſ.}\, \zeta + 2\delta g t}. \quad \text{Porro eſt}$$

$$\text{tang.}\, (\xi - \theta) = \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f f g t}{e a a \,\text{ſin.}\, \zeta},$$

exiſtente

$$\text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} - e \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h}}{e \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h}},$$

vnde angulus θ innoteſcit, hincque ob $DZO = \Phi + \theta = \zeta - \xi + \theta$, concluditur

$$\text{tang.}\, DZO = \text{tang.}\, (\Phi + \theta) = \frac{\varepsilon a a k \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h} + 2\delta f g t (e - \varepsilon) f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h}}{\varepsilon a a k \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h} - 2\delta \varepsilon f f g t \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h}}.$$

Atque ex his tandem nacti ſumus $ȣ \,\text{coſ.}\, s = \varepsilon \,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}$ et $ȣ \,\text{ſin.}\, s = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{f \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta)}$. Denique pro celeritate radente ſecundum I Q, ea eſt $\sqrt{(vv - 2ȣ v f \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta + ȣȣ f f \,\text{ſin.}\, s^2)}$; quae ſi vocetur $= w$, ſupra oſtendimus eſſe

$$\text{ſin.}\, \xi = -\frac{ȣ f \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, \theta}{w} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\, \xi = \frac{ȣ f \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta - v}{w},$$

vnde $ȣ$ et s definiuntur. Sed pro ſitu punctorum A, B, C in globo fixorum ad quoduis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, vt nihil inde concludi queat. Interim ſi pro puncto A vocetur $ZA = l$ et $EZA = \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

I. *dl*

$$\text{I. } dl = dt\left(\varepsilon\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}(\mathfrak{h}+\lambda) - \frac{2\delta fgt}{aa}\,\text{coſ.}(\zeta+\lambda)\right),$$

$$\text{II. } d\lambda\,\text{ſin.}\,l = \varepsilon\,dt\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,l + \varepsilon\,dt\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{coſ.}(\mathfrak{h}+\lambda) + \frac{2\delta fgt}{aa}\,\text{ſin.}(\zeta+\lambda),$$

quarum reſolutio vereor ne fruſtra ſuſcipiatur. Cum autem ad quoduis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari aſſignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo deſideratur, ſufficere poteſt, eo magis mirum videtur, quod motus ſingulorum globi punctorum quaſi vires analyſeos ſuperet. Multo minus igitur de motu globorum, in quibus momenta inertiae non ſunt aequalia, quicquam definire licebit.

Problema VI.

§. 18. *Si globo, cuius omnia momenta inertiae ſunt inter ſe aequalia, motus quicunque fuerit impreſſus, aſſignare temporis punctum, vbi celeritas radens, ideoque et frictio euaneſcit, indeque globus motu vniformi progredi pergit.*

Solutio.

Supra §. 2. vidimus, vt attritus euaneſcat, has duas conditiones requiri: alteram $\mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,\theta = 0$, alteram $v = f\,\mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,\theta$, ſeu in expreſſione

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{f\,\mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,\theta}{v - f\,\mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,\theta},$$

tam numeratorem quam denominatorem ſimul euaneſcere debere. Cum autem inuenerimus

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{e\,\text{ſin.}\,\zeta}{e\,\text{coſ.}\,\zeta + 2\delta g t},$$

vbi numerator $e\,\text{ſin.}\,\zeta$ eſt conſtans, ſi in illa forma numerator euaneſcat, poſitio $\text{coſ.}\,\theta = 0$ tempus quaeſitum declarabit.

Verum

Verum idem luculentius determinabimus, ſi ad quoduis tempus elapſum t celeritatem radentem w inueſtigemus. Cum igitur ex valore §. 17. inuento: ſin. $\xi = -\frac{\text{ȣ} f\, \text{ſin.}\, s\, \text{coſ.}\, \theta}{w}$ habeamus

$$w = \frac{-\text{ȣ} f\, \text{ſin.}\, s\, \text{coſ.}\, \theta}{\text{ſin.}\, \xi},$$

quae expreſſio ob ȣ ſin. $s = \frac{e\, \text{ſin.}\, \zeta}{f\, \text{coſ.}\, (\xi - \theta)}$ abit in hanc:

$$w = \frac{-e\, \text{ſin.}\, \zeta\, \text{coſ.}\, \theta}{\text{ſin.}\, \xi\, \text{coſ.}\, (\xi - \theta)}:$$

atque ob $\theta = \xi - (\xi - \theta)$ in hanc:

$$w = -e\, \text{ſin.}\, \zeta\, (\text{cot.}\, \xi + \text{tang.}\, (\xi - \theta));$$

ſi hic pro tang. ξ et tang. $(\xi - \theta)$ valores ſupra inuentos ſubſtituamus, reperiemus:

$$w = -(e\, \text{coſ.}\, \xi + 2\delta g t + e\, \text{ſin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \tfrac{2\delta ff g t}{aa}).$$

At vero eſt

$$\text{coſ.}\, \zeta + \text{ſin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\text{coſ.}\, \mathfrak{h}}{\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h})} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = -\frac{e\, \text{coſ.}\, \mathfrak{h}}{k}, \text{ vnde fit}$$
$$e\, \text{coſ.}\, \zeta + e\, \text{ſin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = -k,$$

vbi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapſo tempore t habebimus celeritatem radentem

$$w = k - 2\delta g\, (1 + \tfrac{ff}{aa})\, t,$$

ita vt ea labente tempore vniformiter decreſcat, tandem ergo certe euaneſcat, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{aak}{2\delta g\, (aa + ff)}$, eritque tum coſ. $\theta = 0$ et $\theta = 90° = PZO$. Quod ergo cum euenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes ſe ſint habiturae, et quoniam

$$2\delta g t = \frac{aak}{aa+ff} \text{ erit}$$

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{aak\,\text{ſin.}\,\zeta}{e(aa+ff)+aak\,\text{coſ.}\,\zeta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{e(aa+ff)\,\text{tang.}\,\zeta}{e(aa+ff)+aak},$$

hinc fit $\text{ȣ}\,\text{ſin.}\,s = \frac{e\,\text{ſin.}\,\zeta}{f\,\text{ſin.}\,\xi}$. Cum autem ſit

$$v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\,\text{coſ.}\,\zeta}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)} \text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{aak\,\text{ſin.}\,\zeta}{(aa+ff)v}, \quad \text{coſ.}\,\Phi = \frac{e(aa+ff)+aak\,\text{coſ.}\,\zeta}{(aa+ff)v},$$

atque $\text{ſin.}\,\xi = \frac{e\,\text{ſin.}\,\zeta}{v}$ ideoque $\text{ȣ}\,\text{ſin.}\,s = \frac{v}{f}$. Porro quia eſt $\text{ȣ}\,\text{coſ.}\,s = \varepsilon\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}$, erit $\text{tang.}\,s = \frac{v}{\varepsilon f\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}}$ et

$$\text{ȣ} = \sqrt{\left(\frac{vv}{ff} + \varepsilon\varepsilon\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}^2\right)},$$

ſiue ſubſtituto valore v:

$$\text{ȣ} = \frac{\sqrt{(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}^2)}}{aa+ff}$$

ob $kk = ee - 2\varepsilon ef\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}^2$.

Corollarium 1.

§. 19. Quo maior ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam ceſſante frictione ad vniformitatem redigatur. Ac ſi globus conſtet ex materia homogenea, fit $aa = \frac{2}{5}ff$, ideoque motus vniformitas incipit elapſo tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. ſec., hinc in hypotheſi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, exiſtente $g = 15\frac{5}{8}$ pedum Rhenanorum.

Corollarium 2.

§. 20. Vt centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, ſtatus initialis ita comparatus eſſe debet, vt ſit $\text{coſ.}\,\zeta = -1$ et $e = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $\text{ſin.}\,\mathfrak{h} = 1$ et $k = e - \varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} = e - \varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}$

hinc-

hincque ε ſin. f $= \frac{ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$, fit $s = 0$ et $\gamma = \varepsilon$ coſ. f, qua celeritate angulari iam globus circa axem verticalem quieſcentem gyrabitur, elapſo ab initio tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ min. ſec.

Corollarium 3.

§. 21. Hoc autem caſu, quo initio eſt $\mathfrak{h} = 90°$ et $\varepsilon = \frac{-ef}{aa\,\text{ſin. f}}$ fit $\zeta = 180°$; $\Phi = 0$; $\xi = 180°$; $\theta = 90°$; $v = e - 2\delta g t$; tum vero habebimus γ coſ. $s = \frac{-ef\,\text{coſ. f}}{aa\,\text{ſin. f}}$; γ ſin. $s = -\frac{ef}{aa}(1 - \frac{2\delta g t}{e})$; hincque

$$\text{tang. } s = (1 - \tfrac{2\delta g t}{e})\,\text{tang. f et}$$

$$\gamma = \frac{-e}{aa\,\text{ſin. f}} \sqrt{(1 - \tfrac{4\delta g t}{e}\,\text{ſin. f} + \tfrac{4\delta\delta g g t t}{ee}\,\text{ſin. f}^2)}.$$

At initio erat celeritas radens $k = e(1 + \frac{ff}{aa})$, elapſo autem tempore t ea eſt $w = (1 + \frac{ff}{aa})(e - 2\delta g t)$, ſicque poſito $t = \frac{e}{2\delta g}$ ſimul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, vt ante.

Corollarium 4.

§. 22. Ne valor γ ſin. $s = \frac{e\,\text{ſin.}\,\zeta}{f\,\text{coſ.}(\xi - \theta)}$ indefinitus videatur, quod fit ſi numerator ac denominator euaneſcant, ſeu $\zeta = 0$, conueniet loco ſin. ζ et coſ. $(\xi - \theta)$ valores ex ſuperioribus ſubſtitui, atque hinc reperietur:

$$\gamma\,\text{ſin}\,s = \sqrt{(\varepsilon\varepsilon\,\text{ſin. f}^2 - \tfrac{4\delta\varepsilon g t\,\text{ſin. f}(\varepsilon f\,\text{ſin. f} - e\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h})}{aak} + \tfrac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4})},$$

vnde ob γ coſ. $s = \varepsilon$ coſ. f prodit

$$\gamma\gamma = \varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t\,\text{ſin. f}\,(\varepsilon f\,\text{ſin. f} - e\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}.$$

 Corol-

Corollarium 5.

§. 23. Cum ſit vis viua globi $= M(vv + aa\mathfrak{s}\mathfrak{s})$, erat ea initio $= M(ee + \varepsilon\varepsilon aa)$; elapſo autem tempore t ea erit $= M(ee + \varepsilon\varepsilon aa - 4\delta gkt + 4(1 + \frac{ff}{aa})\delta\delta ggtt)$. At elapſo tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, vis viua fiet

$$\frac{M(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa + ff\,\text{coſ.}\,\mathfrak{f}^2))}{aa + ff},$$

cuius defectus ab initiali eſt

$$\frac{Maa(ee - 2\varepsilon ef\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f}^2)}{aa + ff} = \frac{Maakk}{aa + ff},$$

ita vt iſta vis viua ſit

$$M(ee + \varepsilon\varepsilon aa - \frac{aakk}{aa + ff}).$$

Scholion.

Tab. IV. Fig. 2. §. 24. Ex his ergo formulis totus globi motus aſſignari poteſt, quicunque motus ei initio fuerit impreſſus. Interim tamen hae formulae non parum ſunt complexae, vnde ad clariorem explicationem haud abs re erit caſus quosdam magis notabiles euoluere. Cuiusmodi ſunt, vti iam ſupra innuimus, duo potiſſimum: alter quo arcus ZO initio erat quadrans; alter vero quo angulus $DZO = \mathfrak{h}$ erat rectus: vtrumque igitur ſeorſim explicemus.

Problema VII.

§. 25. *Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impreſſus, praeter motum progreſſiuum definire continuationem motus.*

Solutio.

Solutio.

Cum initio axis gyrationis fuerit horizontalis, erit ſ = Z O = 90°. Denotante ergo e celeritatem progreſſivam ſecundum directionem D I E, et ε celeritatem angularem circa axem I O, in ſenſum Z E T D, ſit pro puncto O angulus D Z O = $\mathfrak{h}$, manente f radio globi et Maa momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens

$$k = \sqrt{(ee - 2\varepsilon ef\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff)}$$

et pro eius directione I Q angulus D Z Q = ζ, vt ſit

$$\text{ſin.}\,\zeta = \frac{-\varepsilon f\,\text{coſ.}\,\mathfrak{h}}{k} \text{ et coſ.}\,\zeta = \frac{\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} - e}{k}.$$

His pro ſtatu initiali conſtitutis, elapſo tempore t centrum globi deſcripſerit viam G I, vt iam ſit in I, vbi eius celeritas ſecundum I R erit Tab. IV. Fig. 3.

$$v = \sqrt{\left(ee + \frac{4\delta egt(\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} - e)}{k} + 4\delta\delta ggtt\right)},$$

vnde poſitis coordinatis G X = X, et X I = Y, ob

$$\text{tang. E I R} = \text{tang.}\,\Phi = \frac{-2\delta\varepsilon fgt\,\text{coſ.}\,\mathfrak{h}}{ek + 2\delta gt(\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} - e)}$$

erit

$$dX = \varepsilon dt + \frac{2\delta gtdt}{k}(\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} - e) \text{ et}$$

$$dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgtdt\,\text{coſ.}\,\mathfrak{h}}{k}, \text{ ideoque}$$

$$GX = X = \varepsilon t + \frac{\delta gtt}{k}(\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h} - e) \text{ et}$$

$$XI = Y = -\frac{\delta\varepsilon fgtt}{k}\,\text{coſ.}\,\mathfrak{h}.$$

Tum vero pro motu gyratorio, qui iam fiat in ſenſum Fig. 2. Z E T D celeritate angulari = ȣ circa polum O, exiſtente Z O = ſ, P Z O = θ et D Z Q = $\Phi + \xi$, vbi I Q refert directionem celeritatis radentis, quia conſtanter eſt $\Phi + \xi = \zeta$, ſeu directio I Q conſtans, erit

 tang.

$$\text{tang.}\ \xi = \frac{-\varepsilon f\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{\varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} - e e + 2\delta g k t}$$ et

$$\text{tang.}\ (\xi - \theta) = \frac{2f - e\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}}{e\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}} - \frac{2\delta f g k t}{\varepsilon e a a\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}},$$

vnde ambo anguli ξ et θ definiuntur. Vel erit

$$\text{tang.}\ (\Phi + \theta) = \frac{\varepsilon a a k\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + 2\delta f g t (e - \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h})}{\varepsilon a a k\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h} - 2\delta \varepsilon f f g t\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}.$$

Celeritas autem radens ſecundum directionem IQ eſt

$$w = k - 2\delta g (1 + \tfrac{f f}{a a}) t.$$

Tum vero ob $\mathfrak{s}$ coſ. $s = 0$ erit arcus $ZO = s$ quadrans et

$$\mathfrak{s} = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta \varepsilon f g t (\varepsilon f - e\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h})}{a a k} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)}.$$

Hic autem motus inaequabilis tantum durabit per tempus $t = \frac{a a k}{2\delta g (a a + f f)}$, quo elapſo eſt $s = 90°$,

$$\text{tang.}\ \Phi = \frac{-\varepsilon a a f\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{e (a a + f f) + \varepsilon a (\varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} - e)} = \frac{-\varepsilon a a\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{e f + \varepsilon a a\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}}$$

$$= \sqrt{\left(e e + \frac{2 a a e (\varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} - e)}{a a + f f} + \frac{a^4 k k}{(a a + f f)^2}\right)};$$

$$\mathfrak{s} = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{(e e f f + 2\varepsilon e a a f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4)}}{a a + f f}$$

ſubſtituto pro $k k$ valore. Tum autem fit angulus $\theta = 90°$ et ſin. $\xi = \frac{e\ \text{ſin.}\ \zeta}{v}$.

Corollarium I.

§. 26. Si initio fuerit angulus $DZO = \mathfrak{f} = 0$, erit $k = \sqrt{(e e + \varepsilon\varepsilon f f)}$: pro angulo $DZQ = \zeta$ fit ſin. $\zeta = -\frac{\varepsilon f}{k}$ et coſ. $\zeta = \frac{-e}{k}$; tum vero poſt tempus t prodit

$$v = \sqrt{(e e - \frac{4\delta e e g t}{k} + 4\delta\delta g g t t)}$$

$$\text{tang.}\ \Phi = \frac{-2\delta \varepsilon f g t}{e (k - 2\delta g t)};$$

$$X = e t (1 - \frac{\delta g t}{k});$$

$$Y = \frac{-\delta \varepsilon f g t t}{k}.$$

tang.

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{\varepsilon e f}{ee - 2\delta g k t};$$
$$\text{tang}\,(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f}{e} - \frac{2\delta f g k t}{\varepsilon e a a};$$
$$\text{tang.}\,(\Phi + \theta) = \frac{2\delta e f g t}{\varepsilon a a k - 2\delta e f f g t};$$
$$\text{ȣ} = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon\varepsilon f f g t}{a a k} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)} \text{ et}$$
$$v = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t.$$

Elapſo autem tempore $t = \frac{a a k}{2\delta g(a a + f f)}$ erit tang. $\Phi = \frac{\varepsilon a a}{e f}$; $v = \frac{f\sqrt{(e e f f + \varepsilon\varepsilon a^4)}}{aa + ff} = f\,\text{ȣ}$; $\theta = 90°$ et

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{\varepsilon e f(a a + f f)}{ee(aa + ff) - aakk)} = \frac{\varepsilon e(a a + f f)}{f(e e - \varepsilon\varepsilon a a)}.$$

Corollarium 2.

§. 27. Si angulus DZO = 𝔣 eſſet = 180°, eaedem formulae motum indicabunt ſumta celeritate angulari ȣ negatiua, ſeu motu gyratorio in contrarium verſo. At ſi ſit $\varepsilon = 0$, ſeu globo ſolus motus progreſſiuus fuerit impreſſus, fit $k = e$, $\zeta = 180°$, $v = e - 2\delta g t$; $\Phi = 0$, $X = t(e - \delta g t)$, $Y = 0$, $\xi = 180°$; $\theta = 90°$; ȣ $= \frac{2\delta f g t}{a a}$, et elapſo tempore $t = \frac{a a e}{2\delta g(a a + f f)}$ fit $v = \frac{e f f}{a a + f f}$, ȣ $= \frac{e f}{a a + f f}$ et

$$X = \frac{e t(a a + 2 f f)}{2(a a + f f)} = \frac{a a e e(a a + 2 f f)}{4\delta g(a a + f f)}.$$

Scholion.

§. 27. Caſus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium eſt adeptus, in genere valet, neque ad vllam hypotheſin angulorum 𝔣 et 𝔥 eſt adſtrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progreſſiuo retardato, motumque paullatim gyratorium accipiet, donec elapſo tempore $t = \frac{a a e}{2\delta g(a a + f f)}$ motum vniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur

mur ad caſum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit, ſine vllo motu progreſſiuo, cuius euolutio eſt facilis. Poſito enim $e = 0$ erit $k = \varepsilon f \sin \mathrm{f}$, hincque fit $\sin. \zeta = -\cos. \mathfrak{h}$ et $\cos. \zeta = \sin. \mathfrak{h}$, ergo $\zeta = \mathfrak{h} - 90^\circ$, vbi pro axe gyrationis initio impreſſae I O eſt $ZO = \mathrm{f}$ et $DZO = \mathfrak{h}$, exiſtente celeritate angulari in ſenſum $ZETD = \varepsilon$. Elapſo ergo tempore t fit $\Phi = \zeta$, ſcilicet ſublato ab angulo $DZO = \mathfrak{h}$ angulo recto P Z O, erit P I directio motus progreſſiui, quem globus acquiret, cuius celeritas erit $v = 2\delta g t$, ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit $\text{tang.} \xi = 0$ et $\text{tang.} (\xi - \theta) = \infty$, ergo ob $\Phi + \xi = \zeta = \mathfrak{h} - 90^\circ$ erit $\xi = 0$ et $\theta = 90^\circ$, hinc $DZO = \zeta + 90^\circ = \mathfrak{h}$, ita vt polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex § 22. eſt

$$\text{ȣ} \sin. s = \sqrt{\left(ee \sin. \mathrm{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin. \mathrm{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)} = \varepsilon \sin \mathrm{f} - \frac{2\delta f g t}{aa}$$

et $\text{ȣ} \cos. s = \varepsilon \cos. \mathrm{f}$, vnde fit

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathrm{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \cos. \mathrm{f}},$$

ita vt arcus Z O diminuatur, niſi fuerit quadrans vel eo maior, et

$$\text{ȣ} = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin. \mathrm{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)}.$$

Motus autem ad vniformitatem reducetur elapſo tempore $t = \frac{\varepsilon a a f \sin. \mathrm{f}}{2\delta g (aa + ff)}$; fitque tum

$$\text{ȣ} = \frac{\varepsilon \sqrt{(a^4 \sin. \mathrm{f}^2 + (aa + ff)^2 \cos. \mathrm{f}^2)}}{aa + ff};$$

$$v = \frac{\varepsilon a a f \sin. \mathrm{f}}{aa + ff} \text{ et } \text{tang.}\, s = \frac{aa \,\text{tang.}\, \mathrm{f}}{aa + ff}.$$

Si ergo fuiſſet $\mathrm{f} = 0$, ſeu globo motus gyratorius circa axem verticalem impreſſus eſſet, ſine vllo motu progreſſiuo, eundem motum ſine vlla mutatione eſſet conſeruaturus.

Problema

Problema VIII.

§. 28. *Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, motus gyratorius fuerit impreſſus circa axem ad motus progreſſiui directionem normalem; definire continuationem motus.*

Solutio.

Cum motus progreſſiui initio impreſſi directio ſit recta DIE, et celeritas $= e$, angulus DZO $= \mathfrak{h}$ eſt rectus, et ſumto ZO $= \mathfrak{f}$ erat O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ in ſenſum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (e - f \varepsilon \sin. \mathfrak{f})$, vbi valorem poſitiuum pro k ſumi oportet, ita vt hic duo prodeant caſus ſeorſim euoluendi.

Caſus primus

Sit $e > \varepsilon f \sin. \mathfrak{f}$, erit $k = e - \varepsilon f \sin. \mathfrak{f}$, quae eſt celeritas radens initio, eiusque directio IQ, ita vt ſit $\sin.$ DQ $= 0$ et $\cos.$ DQ $= -1$, ideoque DQ $= \zeta = 180°$, et Q cadat in E globusque a frictione δ M ſecundum directionem ID conſtanter retrahatur; vnde ſtatim concluditur globi centrum I in eadem recta DE eſſe manſurum. Elapſo ergo tempore t, ob $\cos. \zeta = -1$, fit celeritas centri $v = e - 2\delta g t$, et celeritas radens

$$w = e - \varepsilon f \sin. \mathfrak{f} - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t;$$

tum vero $\Phi = 0$; $\xi = 180°$ atque $\theta = 0$. Quare pro axe gyrationis praeſente IO eſt DIO $= 90°$, et poſito arcu ZO $= s$ et celeritate angulari $= \mathfrak{s}$ habemus $\mathfrak{s} \cos. s = \varepsilon \cos. \mathfrak{f}$ et ex (§. 22.)

$$\mathfrak{s} \sin. s = \varepsilon \sin. \mathfrak{f} + \frac{2\delta f g t}{aa},$$

vnde colligitur:

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathfrak{f} + \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}} \quad \text{et}$$

$$\varpi = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\delta \varepsilon f g t \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f}}{a a} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)}.$$

Hoc autem tempore t percurrit centrum I lineam rectam $GX = X = t(e - \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{a a (e - \varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f})}{2\delta g (a a + f f)}$, quo elapſo erit ſpatium

$$X = \frac{a a (e - \varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f})(e(a a + f f) + \varepsilon a a f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f})}{2\delta g (a a + f f)^2}$$

et celeritas $v = \frac{f(\varepsilon a^2 f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} + e f)}{a a + f f}$. At pro motu gyratorio fit

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathfrak{f} + \frac{f(e - \varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f})}{\varepsilon (a a + f f)\,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}} = \frac{e f + \varepsilon a a \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f}}{\varepsilon (a a + f f)\,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}},$$

(exiſtente $DIO = 90°$) et celeritas angularis:

$$\varpi = \frac{\sqrt{(e e f f + 2\varepsilon e f a a \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f}^2 - \varepsilon\varepsilon (a a + f f)^2 \,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}^2)}}{a a + f f}.$$

Caſus ſecundus

Sit $e < \varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f}$, ſeu $k = \varepsilon f \,\text{ſin}\, \mathfrak{f} - e$, quae eſt celeritas radens initio, eiusque directio IQ talis, vt ſit ſin. $DQ = 0$, coſ. $DQ = 1$, ergo $DQ = \zeta = 0$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM ſecundum directionem IE conſtanter acceleratur, eiusque centrum I in eadem recta IE progreditur, atque elapſo tempore t erit celeritas $v = e + 2\delta g t$ et celeritas radens

$$w = \varepsilon f \,\text{ſin}\, \mathfrak{f} - e - 2\delta g \left(1 + \frac{f f}{a a}\right) t.$$

Tum vero fit $\Phi = 0$ et $\xi = 0$ atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praeſenti IO eſt $DIO = 90°$ et poſito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \varpi$ habebimus $\varpi \,\text{coſ.}\, s = \varepsilon \,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}$ et $\varpi \,\text{ſin.}\, s = \varepsilon \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{a a}$, vnde fit

tang.

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, f - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \,\text{coſ.}\, f} \quad \text{et}$$

$$\text{ȣ} = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \,\text{ſin.}\, f}{a a} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right),$$

hoc tempore t centrum globi percurrit lineam rectam $GX = X = t(e + \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum per tempus $t = \frac{a a (\varepsilon f \,\text{ſin.}\, f - e)}{2\delta g (a a + f f)}$, quo elapſo erit celeritas $v = \frac{f (e f - \varepsilon a a \,\text{ſin.}\, f)}{a a + f f}$ et ſpatium

$$X = \frac{a a (\varepsilon f \,\text{ſin.}\, f - e)(e (a a + f f) + \varepsilon a a f \,\text{ſin.}\, f)}{2\delta g (a a + f f)^2}.$$

At pro motu gyratorio reperitur

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, ZO = \frac{e f + \varepsilon a a \,\text{ſin.}\, f}{\varepsilon (a a + f f)\,\text{coſ.}\, f},$$

(exiſtente perpetuo $DIO = 90°$), et celeritas angularis

$$\text{ȣ} = \frac{\surd(e e f f + 2\varepsilon e a a f \,\text{ſin.}\, f + \varepsilon\varepsilon a^4 \,\text{ſin.}\, f^2 + \varepsilon\varepsilon (a a + f f)^2 \,\text{coſ.}\, f^2)}{a a + f f}.$$

Corollarium 1.

§. 29. Si fuerit $e = \varepsilon f \,\text{ſin.}\, f$, globus ſtatim ab initio motum proſequetur vniformem, tam progreſſiuum quam gyratorium, qui caſus limitem conſtituit inter binos tractatus.

Corollarium 2.

§. 30. Ad priorem caſum, quo $e > \varepsilon f \,\text{ſin.}\, f$, referendi ſunt ii, quibus ε habet negatiuum valorem, ſeu globo impreſſus fuerit initio motus gyratorius in ſenſum ZDTE. Poſito autem $-\varepsilon$ loco ε, fieri poteſt vt globus reuertatur, antequam ad vniformitatem peruenerit.

Corollarium 3.

§. 31. Caſu hoc quo ε negatiue capitur, ad tempus t habebimus, $\Phi = 0$, $\theta = 0$, $\xi = 180°$, $v = e - 2\delta g t$,

$$w = e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f} - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t;$$

$$\mathrm{tang.}\, s = \mathrm{tang.}\,\mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \cos.\mathfrak{f}} \text{ et}$$

$$\upsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin.\mathfrak{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)};$$

at poſt tempus $t = \frac{aa(e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g (aa + ff)}$, percurſo ſpatio

$$X = \frac{aa(e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})(e(aa + 2ff) - \varepsilon a^2 f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g (aa + ff)^2},$$

globi motus vniformitatem attinget, eritque tum

$$v = \frac{f(ef - \varepsilon aa \sin.\mathfrak{f})}{aa + ff};$$

$$\mathrm{tang.}\, s = \frac{\varepsilon aa \sin.\mathfrak{f} - ef}{\varepsilon(aa + ff)\cos.\mathfrak{f}} \text{ et}$$

$$\upsilon = \frac{\sqrt{(eeff - 2\varepsilon e aa f \sin.\mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin.\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon (aa + ff)^2 \cos.\mathfrak{f}^2)}}{aa + ff}.$$

Scholion.

§. 32. Caſus hic praecipue eſt memorabilis, quo globo eiusmodi motus imprimi poteſt, vt primo recedat, mox autem iterum reuertatur, quod experimento oſtendi ſolet, dum digito ad globum circa D applicato et deorſum preſſo duplex motus globo imprimitur, alter progreſſiuus in directione DIE, alter gyratorius in ſenſum ZDTE. Sed vt phaenomenon ſuccedat, neceſſe eſt vt celeritas angularis prae progreſſiua certum quendam limitem excedat, quem quo facilius agnoſcamus, calculum ad iſtum caſum accommodemus quo motus gyratorius globo circa axem horizontalem et ad directionem motus progreſſiui normalem imprimitur. Quod ſi ergo e denotet celeritatem progreſſiuam ſecundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem retrogyrantem in ſenſum ZDTE, exiſtente f radio globi et Maa eius momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapſo tempore t eius celeritas ſecundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta g t$, confecto ſpatio

$X =$

$X = t(e - \delta g t)$: tum vero etiamnunc circa eundem axem retrouoluetur celeritate angulari $\omega = \varepsilon - \frac{2\delta f g t}{aa}$. Motus autem aequabilis euadit elapſo tempore $t = \frac{aa(e + \varepsilon f)}{2\delta g(aa + ff)}$, eritque tum celeritas progreſſiua $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa)}{aa + ff}$ et angularis $\omega = \frac{\varepsilon aa - ef}{aa + ff}$. Quare ſi fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro mouetur, gyratorio motu adhuc retro vergente: ſin autem fuerit $\varepsilon < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio in ſenſum contrarium eſt verſa. Illo caſu globus regredi coepit elapſo tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus ſit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$ et ef exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae ſi vocetur $= b$, erit poſt tempus t celeritas progreſſiua $v = e - 2\delta g t$, et gyratoria in puncto contactus, quae ſit $u = b - 5\delta g t$, et ſpatium percurſum $= t(e - \delta g t)$: motus vero aequabilis euadet elapſo tempore $t = \frac{e + b}{7\delta g}$, et confecto ſpatio $= \frac{(6e - b)(e + b)}{49\delta g}$, vbi erit celeritas progreſſiua $v = \frac{5e - 2b}{7}$ et gyratoria $u = \frac{2b - 5e}{7}$. Vt ergo phoenomenon memoratum ſuccedat, debet eſſe initio $b > \frac{5}{2}e$. Sin autem eſſet $b = \frac{5}{2}e$, vterque motus ſimul extingueretur, elapſo ſcilicet tempore $\frac{e}{2\delta g}$ min. ſec. et confecto ſpatio $\frac{ee}{4\delta g}$.

Concluſiones.

Pro determinatione motus, quo globus quomodocunque impulſus ſuper plano horizontali progreditur.

I. *Status quaeſtionis.* Globus hic ita comparatus ſupponitur, vt non ſolum eius centrum grauitatis in ipſum

ſum figurae centrum incidat, ſed etiam omnia momenta inertiae reſpectu cuiusque diametri inter ſe ſint aequalia. Talis globi radius hic ponitur $= f$, eiusque maſſa ſeu pondus $=$ M et momentum inertiae reſpectu axis cuiuscunque per centrum grauitatis tranſeuntis $= M a a$, ita vt, ſi globus ex materia homogenea conſtet, futurum ſit $aa = \frac{2}{5} ff$. Praeterea vero tam ipſum planum horizontale quam tota globi ſuperficies ita aequaliter laeuigata aſſumitur, vt dum globus ſuper plano radendo ingreditur, vbique eandem frictionem patiatur, quae, cum preſſioni ſeu ipſi ponderi globi ſit proportionalis, hic ſtatuitur $= \delta$ M.

Tab. IV. Fig. 1. II. *Status initialis.* Ponamus globum initio in puncto D plano inſiſtere eique motum progreſſiuum ſecundum directionem D O eſſe impreſſum cum ea celeritate, vt globus vno minuto ſecundo ſpatium $= e$ eſſet percurſurus, quae celeritas non tam puncto contactus D quam centro globi impreſſa eſt intelligenda. Tum vero referat circulus A B C D ſectionem verticalem globi ſecundum directionem D O factam, qui ſimul hemiſphaerium globi conuexum nobis obuerſum referat, in quo ſit E polus, circa quem globo motus gyratorius initio fuit impreſſus, cuius celeritas angularis in ſenſum A B C D vergens ſit $= \varepsilon$, ita vt ε deſignet angulum vno minuto ſecundo abſoluendum. Pro ſitu autem huius puncti E ſit B punctum globi ſummum, puncto contactus D diametraliter oppoſitum, vnde per polum E agatur circulus maximus B E et vocetur arcus $BE = \mathfrak{f}$ et angulus $ABE = \mathfrak{h}$; quibus ergo poſitis tota vis viua globo initio impreſſa erit $= M(ee + \varepsilon\varepsilon aa)$. Poſtquam igitur globo talis duplex motus fuerit impreſſus, quaeritur quomodo is deinceps ſit pro-

progreſſurus; ac primo quidem ſtatim duos caſus notaſſe iuuabit, quibus globus eundem motum impreſſum perpetuo eſſet conſeruaturus: Alter ſcilicet caſus tum locum habebit, quando celeritas progreſſiua e fuerit nulla, ſimulque globus circa axem verticalem BD gyretur, ita vt hoc caſu fuerit $BE = \mathfrak{f} = 0$; quia enim tum nulla adeſt frictio, globus perpetuo in eodem loco gyrari perget. Alter vero caſus tum locum habet, quando axis gyrationis fuerit horizontalis ideoque angulus $\mathfrak{h} = 90°$, ſimul vero inſuper $e = \varepsilon f \sin. \mathfrak{f}$, quandoquidem hoc caſu frictio pariter ceſſat. Reliquis autem caſibus omnibus globus ab initio per aliquod tempus motu inaequabili feretur, dum tam motus progreſſiuus quam gyratorius continuo variabitur, hocque temporis interuallum repertum eſt

$$= \frac{aa \surd (ee - 2\varepsilon ef \sin. \mathfrak{f} \sin. \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin. \mathfrak{f}^2)}{2\delta g (aa + ff)},$$

in minutis ſecundis expreſſum, ſiquidem g denotet altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur. Vnde vniuerſus globi motus ſponte in duas partes diſtinguitur, quarum priore motus erit inaequabilis, poſteriore vero aequabilis.

III. *Determinatio partis prioris.* Elapſum nunc ſit ab initio tempus quodcunque indefinitum $= t$ in minutis ſecundis expreſſum, quod autem minus ſit quam limes modo aſſignatus

$$\frac{aa \surd (ee - 2\varepsilon ef \sin. \mathfrak{f} \sin. \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin. \mathfrak{f}^2)}{2\delta g (aa + ff)},$$

hocque tempore tangat globus planum horizontale in puncto T, ex quo ad rectam fixam DO ducatur normalis TX vocenturque coordinatae $DX = X$, $XT = Y$, pro linea curua DT, per quam punctum contactus hucusque proceſſit,

ſit, ita vt centrum grauitatis globi ſimilem viam deſcripſiſſe ſit cenſendum. Tum vero ponatur angulus quo elementum Tt ad directionem DO inclinatur $= \Phi$, vt ſit $\text{tang.}\,\Phi = \frac{dY}{dX}$, ipſa autem celeritas, qua centrum globi hoc momento ſecundum Tt ingreditur, vocetur tantiſper $= v$, eritque $\frac{dX}{dt} = v \,\text{coſ.}\, \Phi$ et $\frac{dY}{dt} = v \,\text{ſin.}\, \Phi$. Hos autem valores demum ex motu gyratorio, qui nunc globo conuenit, determinari oportet, quos mox exhibebimus, poſtquam ſcilicet motum gyratorium fuerimus contemplati. Hunc in finem ſecetur iterum globus plano in T inſiſtens, plano verticali MZNT, illi quod in ſtatu initiali conſiderauimus parallelo, ita vt circulus MZNT hemiſphaerium nunc
Tab IV. Fig. 5. nobis obuerſum repraeſentet, in quo punctum O ſit polus, circa quem globus nunc gyratur in ſenſum MZNT celeritate angulari $= \vartheta$. His poſitis iſta motus determinatio ita ſuccincte proponi poterit: Ex elementis ad ſtatum initialem pertinentibus colligatur angulus ζ, vt ſit

$$\text{tang.}\,\zeta = \frac{\varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h}},$$

Tab IV. Fig. 4. ex eoque ſtatim pro motu progreſſiou oritur

$$DX = X = ct + \delta g t t \,\text{coſ.}\, \zeta,$$
$$TX = Y = \delta g t t \,\text{ſin.}\, \zeta,$$

vnde colligitur celeritas ſecundum $DX = \frac{dX}{dt} = e + 2\delta g t \,\text{coſ}\, \zeta$ et celeritas ſecundum XT, ſiue $\frac{dY}{dt} = 2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta$, hincque fit $\text{tang.}\,\Phi = \frac{2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta}{e + 2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta}$, et ipſa celeritas progreſſiua

$$v = \sqrt{(ee + 4\delta e g t \,\text{coſ.}\, \zeta + 4\delta\delta g g t t)}.$$

Pro motu autem gyratorio circa polum O quaeratur angulus η, vt ſit

$$\text{tang.}\,\eta = \text{tang.}\,(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f f g t}{e a a \,\text{ſin.}\, \zeta},$$

hinc-

hincque porro quantitas $q = \frac{e\,\sin.\zeta}{f\,\sin.\zeta}$, eritque pro diſtantia huius poli O a puncto globi ſummo Z, tang. Z O $= \frac{q}{\varepsilon\,\cos. \mathfrak{f}}$, ipſa vero celeritas angularis $\mathfrak{v} = \sqrt{(q\,q + \varepsilon\,\varepsilon\,\cos.\mathfrak{f}^2)}$, denique erit angulus M Z O $= \zeta - \eta$. Sicque omnia quae ad motus determinationem requiruntur ſunt definita.

IV. *Determinatio partis poſterioris.* Iam notauimus motum aequabilem incipere elapſo tempore

$$t = \frac{a\,a\,\sqrt{(e\,e - 2\,e\,\varepsilon\,f\,\sin.\mathfrak{f}\,\sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,f\,f\,\sin.\mathfrak{f}^2)}}{2\,\delta\,g\,(a\,a + f\,f)}.$$

Quod ſi ergo hic valor loco t ſubſtituatur, coordinatae X et Y dabunt punctum in curua D T, quod ſit K, vbi motus aequabilis incipiet. Introducto autem angulo ζ erit tempus illud $t = -\frac{a\,a\,\varepsilon\,f\,\sin.\mathfrak{f}\,\cos.\mathfrak{h}}{2\,\delta\,g\,(a\,a + f\,f)\,\sin.\zeta}$, vbi notetur ſin. ζ eſſe negatiuum. Cum igitur corpus vsque ad punctum K peruenerit, erit eius celeritas pro reſiua in directione D T Tab IV. Fig. 4.

$$= e - \frac{a\,a\,\varepsilon\,f\,\sin.\mathfrak{f}\,\cos.\mathfrak{h}\,\cos.\zeta}{(a\,a + f\,f)\,\sin.\zeta} = \frac{e\,f\,f - a\,a\,\varepsilon\,f\,\sin.\mathfrak{f}\,\sin.\mathfrak{h}}{a\,a + f\,f},$$

et celeritas in directione L K

$$= -\frac{a\,a\,\varepsilon\,f\,\sin.\mathfrak{f} - e\,\cos.\mathfrak{h}}{a\,a + f\,f}.$$

Pro motu autem gyratorio deinceps ſequente habebimus primo

$$\text{tang.}\,\eta = \text{tang.}\,(\zeta - \mathfrak{h}) - \frac{f^3\,\varepsilon\,\sin.\mathfrak{f}\,\cos.\mathfrak{h}}{e\,(a\,a + f\,f)\,\sin.\zeta^2},$$

$$\text{tang.}\,\eta = -\frac{e\,(a\,a + f\,f) - a\,a\,k}{e\,(a\,a + f\,f)\,\text{tang.}\,\zeta},$$

vnde innoteſcit pro noſtro tempore angulus $MZO = \zeta - \eta$. Porro vero pro eodem tempore, vbi contactus fit in puncto K, celeritas centri inuenta eſt

$$v = \sqrt{\left(e\,e + \frac{2\,a\,a\,e\,k\,\cos.\zeta}{a\,a + f\,f} + \frac{a^4\,k\,k}{(a\,a + f\,f)^2}\right)},$$

inclinatio autem directionis motus in K ad rectam fixam

D O, quae in genere erat Φ, nunc fiet

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{a\,a\,k\, \text{ſin.}\, \zeta}{e\,(a\,a + f\,f) + a\,a\,k\, \text{coſ.}\, \zeta},$$

vnde cognoſcitur motus progreſſiuus, quo globus poſt hoc tempus vniformiter progredietur. Pro polo autem gyrationis O iam vidimus eſſe angulum M Z O $= \zeta - \eta$; praeterea vero inuenimus tang. Z O $= \frac{v}{\varepsilon f\, \text{coſ.}\, \mathfrak{f}}$, et ipſam celeritatem gyratoriam:

$$\vartheta = \frac{\sqrt{(e\,e\,f\,f + 2\,e\,\varepsilon\,a\,a\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}\, \text{ſin.}\, \mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,a^4\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}^2 + \varepsilon\,\varepsilon\,(a\,a + f\,f)^2\, \text{coſ.}\, \mathfrak{f}^2)}}{a\,a + f\,f}$$

hunc ergo motum gyratorium globus poſthac perpetuo conſeruabit. Cum autem globus ad hanc vniformitatem peruenerit, erit eius vis viua

$$= \frac{M\,(e\,e\,f\,f + 2\,\varepsilon\,e\,a\,a\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}\, \text{ſin.}\, \mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,a\,a\,(a\,a + f\,f)\, \text{coſ.}\, \mathfrak{f}^2)}{a\,a + f\,f},$$

quae deficit ab initiali quantitate

$$\frac{M\,a\,a\,(e\,e - 2\,\varepsilon\,e\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}\, \text{ſin.}\, \mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,f\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}^2)}{a\,a + f\,f} = \frac{M\,a\,a\,k\,k}{a\,a + f\,f},$$

vbi breuitatis gratia poſuimus

$$k\,k = e\,e - 2\,\varepsilon\,e\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}\, \text{ſin}\, \mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,f\,f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}^2.$$

Pro hoc motu vniformi notaſſe iuuabit fore angulum M Z O $= \zeta - \eta = 90^\circ + \Phi$, tum vero $v = f\,\vartheta\, \text{ſin.}\, s$, quibus ergo formulis conditio motus aequabilis continetur.

Additamentum.

Praeterea caſus hic imprimis notatu dignus videtur quo globo initio nullus plane motus progreſſiuus fuit impreſſus, ita vt ſit $e = 0$; tum enim erit tang $\zeta = -\text{cot.}\, \mathfrak{h}$ ideoque $\zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$ et $k = \varepsilon f\, \text{ſin.}\, \mathfrak{f}$: tum vero pro via deſcripta erit $X = \delta\,g\,t\,t\, \text{coſ.}\, \zeta$ et $Y = \delta\,g\,t\,t\, \text{ſin}\, \zeta$; vnde patet, hanc viam eſſe lineam rectam ad axem D O ſub angulo

gulo $= \zeta$ inclinatam. Praeterea vero erit

$$v \operatorname{coſ.} \Phi = 2 \delta g t \operatorname{coſ.} \zeta \text{ et } v \operatorname{ſin.} \Phi = 2 \delta g t \operatorname{ſin.} \zeta,$$

vnde colligitur $\operatorname{tang.} \Phi = \operatorname{tang.} \zeta$ ideoque $\Phi = \zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$, tum vero ipſa celeritas $v = 2 \delta g t$. Deinde pro motu gyratorio erit $\operatorname{tang.} \eta = \operatorname{tang} (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2 \delta t f g t}{e a a \operatorname{ſin.} \zeta}$, vbi quia $\zeta - \mathfrak{h} = 90^\circ$, erit $\operatorname{tang.} \eta = \infty$, ideoque $\eta = 90^\circ$, conſequenter angulus $MZO = \zeta - \eta = \mathfrak{h}$; vnde patet, polum gyrationis O perpetuo in eodem circulo verticali manere. Cum igitur ſit

$$\upsilon \operatorname{coſ.} s = \varepsilon \operatorname{coſ.} f \text{ et } \upsilon \operatorname{ſin.} s = \frac{2 \delta g t}{e},$$

colligitur

$$\operatorname{tang.} s = \frac{2 \delta g t}{\varepsilon f \operatorname{coſ.} \mathfrak{f}} \text{ et } \upsilon = \sqrt{\left(\varepsilon \varepsilon \operatorname{coſ.} \mathfrak{f} + \frac{4 \delta \delta g g f f t t}{a^4} \right)};$$

hincque motus inaequabilis durabit per temporis ſpatium $t = \frac{\varepsilon a a f \operatorname{ſin.} \mathfrak{f}}{2 \delta g (a a + f f)}$, quo elapſo erit $v = \frac{\varepsilon a a f \operatorname{ſin.} \mathfrak{f}}{a a + f f}$, manente $\Phi = \zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$. Porro etiamnunc erit angulus $MZO = \mathfrak{h}$, at $\operatorname{tang.} s = \frac{a a}{a a + f f} \operatorname{tang.} \mathfrak{f}$ et

$$\upsilon = \frac{\varepsilon \sqrt{(a^4 \operatorname{ſin.} \mathfrak{f}^2 + (a a + f f)^2 \operatorname{coſ.} \mathfrak{f}^2)}}{a a + f f}.$$

ACCVRATIOR EVOLVTIO FORMVLARVM PRO FILORVM FLEXIBILIVM AEQVILIBRIO ET MOTV INVENTARVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. IV. Fig. 6. Propoſitum ſit filum quodcunque flexile $EZzF$, ſiue elaſticitate praeditum ſiue deſtitutum, quod ſitum teneat in figura repraeſentatum, quem, quatenus non in eodem plano continetur, referamus more ſolito ad ternos axes fixos OA, OB, OC inter ſe normales. Tum pro quouis fili puncto Z conſtitutis ternis coordinatis OX, XY, YZ, vocemus $OX = x$, $XY = y$, $Yz = z$; tum vero ipſa portio fili EZ vocetur $= s$, vt ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Praeterea vero conſideretur craſſities fili vtcunque variabilis atque elementi $Zz = ds$ ſtatuatur maſſula $= S\,ds$; ita vt S ſit functio quaecunque data ipſius s. His poſitis fili elementum $Zz = ds$ ſollicitetur a tribus viribus ſecundum directiones axibus parallelas, quae ſint: $ZP = P$, $ZQ = Q$, $ZR = R$, elaſticitas autem abſoluta in loco Z deſignetur littera G, quae pro indole fili poterit eſſe vel conſtans vel vtcunque variabilis ab arcu s pendens.

§. 2.

§. 2. Quodſi iam iſtud ſilum fuerit in aequilibrio, tres ſequentes aequationes ſunt erutae:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Hae autem tres aequationes ita a ſe inuicem pendent, vt binae iam tertiam in ſe inuoluant, ita vt ſufficiat binas earum tantum reſoluiſſe, quippe quibus totus ſtatus aequilibrii iam perfecte determinatur.

§. 3. Praeterea vero ſi tenſio fili in puncto Z ponatur $= T$, pro eius determinatione inuenta eſt haec formula:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy}{ds}\int Q\,ds - \frac{dz}{ds}\int R\,ds.$$

Tenſio autem iſta T exprimet eam vim, qua punctum Z ſecundum tangentem verſus E trahi deberet ad aequilibrium conſeruandam, ſi portio antecedens fuiſſet reſciſſa.

§. 4. Sin autem filum in motu verſetur atque elapſo tempore t, quod ſemper in minutis ſecundis exprimi aſſumimus, ſitum habeat in figura repraeſentatum, tum ternae coordinatae x, y, z tanquam functiones binarum variabilium, ſcilicet arcus $EZ = s$ et temporis t ſpectari debent. Tum autem denotante g altitudinem ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ex viribus ſollicitantibus P, Q, R quaerantur ſequentes valores deriuati:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);$$

$$Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);$$

$$R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

 vbi

vbi formulae $(\frac{ddx}{dt^2})$, $(\frac{ddy}{dt^2})$, $(\frac{ddz}{dt^2})$, tantum ex variabilitate temporis t ſunt determinandae, arcu s pro conſtante habito. Quo facto iſti valores P', Q', R' denuo vt functiones tantum ipſius s ſpectentur et in ſuperioribus formulis loco P, Q, R ſcribantur, vt prodeant ſequentes aequationes:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds - \tfrac{1}{2g}\int dy \int S\,ds\,(\tfrac{ddx}{dt^2}) + \tfrac{1}{2g}\int dx \int S\,ds\,(\tfrac{ddy}{dt^2}) = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds - \tfrac{1}{2g}\int dz \int S\,ds\,(\tfrac{ddy}{dt^2}) + \tfrac{1}{2g}\int dy \int S\,ds\,(\tfrac{ddz}{dt^2}) = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds - \tfrac{1}{2g}\int dx \int S\,ds\,(\tfrac{ddz}{dt^2}) + \tfrac{1}{2g}\int dz \int S\,ds\,(\tfrac{ddx}{dt^2}) = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Iidem vero valores loco P, Q, R in formula pro tenſione T data ſubſtituti praebebunt tenſionem durante motu, quae ergo erit

$$T = -\tfrac{dx}{ds}\int P\,ds - \tfrac{dy}{ds}\int Q\,ds - \tfrac{dz}{ds}\int R\,ds + \tfrac{dx}{2g\,ds}\int S\,ds\,(\tfrac{ddx}{dt^2}) + \tfrac{dy}{2g\,ds}\int S\,ds\,(\tfrac{ddy}{dt^2}) + \tfrac{dz}{2g\,ds}\int S\,ds\,(\tfrac{ddz}{dt^2}).$$

§. 5. Quanquam autem in his formulis omnes plane motus, qui huiusmodi filis a viribus quibuscunque induci poſſunt continentur: tamen maxime dolendum eſt, ob defectum analyſeos vix vllum fructum ex iis adhuc percipi potuiſſe. Quicquid enim mihi quidem inde elicere licuit ad motus reciprocos et quaſi infinite paruos reſtringitur, cuiusmodi ſunt motus chordarum, laminarum elaſticarum et oſcillationes funium libere ſuſpenſorum, vnde etiamnunc ſuperfluum foret iſtas formulas diligentius euolvere,

vere, praeterquam quod tam arcto nexu cum formulis pro aequilibrio cohaerent, vt non difficile ſit, quicquid de his reperietur, etiam ad illas transferre.

§ 6. Deinde vero etiam hoc loco elaſticitatem fili ſeponam et tantum ſtatum aequilibrii filorum perfecte flexibilium plenius ſum inueſtigaturus, quo facilius formulae inuentae ad omnes plane caſus accommodari queant. Hoc modo tantum habebimus tres aequationes ſequentes:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds = \int dx \int Q\,ds;$$
$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds;$$
$$\text{III. } \int dx \int R\,ds = \int dz \int P\,ds;$$

quibuscum coniungamus formulam pro tenſione datam:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy}{ds}\int Q\,ds - \frac{dz}{ds}\int R\,ds.$$

Illae igitur aequationes differentiatae praebent iſtae:

$$\text{I. } dy \int P\,ds = dx \int Q\,ds,$$
$$\text{II. } dz \int Q\,ds = dy \int R\,ds,$$
$$\text{III. } dx \int R\,ds = dz \int P\,ds.$$

§. 7. Quod ſi harum trium aequationum prima ducatur in dz, ſecunda in dx, ac tertia in dy, eae inuicem additae producent aequationem $0 = 0$, quae, cum ſit identica, declarat in binis aequationibus tertiam iam contineri, quaemadmodum iam ſupra monuimus Hinc autem trium formularum integralium $\int P\,ds$, $\int Q\,ds$, $\int R\,ds$ binae quaelibet per tertiam definiri poſſunt, atque hinc habebimus

$$\int Q\,ds = \frac{dy}{dx}\int P\,ds \quad \text{et} \quad \int R\,ds = \frac{dz}{dx}\int P\,ds.$$

Simi-

Simili modo per formulam $\int Q\,ds$ erit

$$\int P\,ds = \frac{dx}{dy}\int Q\,ds \quad \text{et} \quad \int R\,ds = \frac{dz}{dy}\int Q\,ds.$$

Porro vero per $\int R\,ds$ fiet

$$\int P\,ds = \frac{dx}{dz}\int R\,ds \quad \text{et} \quad \int Q\,ds = \frac{dy}{dz}\int R\,ds.$$

§. 8. Hinc igitur tenſionem T per quamlibet harum formularum integralium, excluſis binis reliquis, exprimere poterimus. Primo enim erit per formulam $\int P\,ds$:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy^2}{ds\,dx}\int P\,ds - \frac{dz^2}{ds\,dx}\int P\,ds = -\frac{ds}{dx}\int P\,ds,$$

propter $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Eodem modo per formulam $\int Q\,ds$ reperiemus quoque $T = -\frac{ds}{dy}\int Q\,ds$ et per formulam $\int R\,ds$, $T = -\frac{ds}{dz}\int R\,ds$.

§. 9. Quod ſi ergo tenſionem T tanquam datam ſpectemus, noſtrae formulae integrales ita definientur vt ſit

$$\int P\,ds = -\frac{T\,dx}{ds},$$

$$\int Q\,ds = -\frac{T\,dy}{ds},$$

$$\int R\,ds = -\frac{T\,dz}{ds},$$

ex quarum differentiatione, ſi elementum ds conſtans capiamus, ipſas vires ſollicitantes $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$, ex tenſione T definire licebit hoc modo:

$$P\,ds = -\frac{dT\,dx - T\,ddx}{ds};$$

$$Q\,ds = -\frac{dT\,dy - T\,ddy}{ds};$$

$$R\,ds = -\frac{dT\,dz - T\,ddz}{ds};$$

atque hinc porro concludimus fore:

P dx

$$P\,dx = -\frac{dT\,dx^2}{ds^2} - \frac{T\,dx\,ddx}{ds^2};$$
$$Q\,dy = -\frac{dT\,dy^2}{ds^2} - \frac{T\,dy\,ddy}{ds^2};$$
$$R\,dz = -\frac{dT\,dz^2}{ds^2} - \frac{T\,dz\,ddz}{ds^2};$$

quae tres formulae coniunctae, cum ſit $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, hincque $dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = 0$, ob ds conſtans, fient $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dT$.

§. 10. Euidens autem eſt hanc formulam $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, exprimere vim tangentialem, qua elementum ds ſecundum ipſam directionem Z z a ternis viribus $P\,ds$, $Q\,ds$, $R\,ds$ ſollicitatur. Quod ſi ergo hanc vim tangentialem deſignemus per $\Theta\,ds$, vt $\Theta\,ds = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, erit vtique $dT = -\Theta\,ds$, ideoque $T = C - \int \Theta\,ds$, quemadmodum ex natura rei conſtat, quandoquidem tenſio ſemper aequatur ſummae omnium virium tangentialium; ſicque viciſſim ex vi tangentiali $\Theta\,ds$ et tenſione T innoteſcent ternae vires ſollicitantes

$$P\,ds = +\Theta\,dx - \frac{T\,ddx}{ds};$$
$$Q\,ds = +\Theta\,dy - \frac{T\,ddy}{ds};$$
$$R\,ds = +\Theta\,dz - \frac{T\,ddz}{ds};$$

§. 11. Quod ſi iam praeter vim tangentialem $\Theta\,ds$ etiam vim normalem in calculum introducere velimus, eamque ponamus $= \Pi\,ds$, cuius directio non ſolum ad elementum Z z normalis eſt intelligenda, ſed etiam ad planum, in quo duo elementa contigua ſunt ſita, ita vt omnes vires ſollicitantes iunctim ſumtae ad has duas vires $\Theta\,ds$ et $\Pi\,ds$ reuocentur: quoniam vis tribus viribus ſollicitantibus $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$ aequiualens eſt

 $ds\sqrt{(P^2}$

$ds\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}$, at vero vires normalis et tangentialis Πds et Θds reducuntur ad hanc vnicam: $ds\sqrt{(\Pi^2+\Theta^2)}$; neceſſe eſt vt fiat $\sqrt{(\Pi^2+\Theta^2)}=\sqrt{(P^2+R^2+Q^2)}$ ideoque $\Pi^2=P^2+Q^2+R^2-\Theta^2$, ſiue

$$\Pi\Pi ds^2=(PP+QQ+RR)ds^2-\Theta\Theta ds^2.$$

§. 12. Supra autem vidimus eſſe

$$\Theta ds=P dx+Q dy+R dz,$$

vnde fit

$$\Theta\Theta ds^2=PP dx^2+QQ dy^2+RR dz^2$$
$$+2PQ dx dy+2PR dx dz+QR dy dz.$$

Tum vero loco ds^2 valorem ſuum $dx^2+dy^2+dz^2$ ſubſtituendo erit

$$(PP+QQ+RR)ds^2=\begin{cases}+(PP+QQ+RR)dx^2\\+(PP+QQ+RR)dy^2\\+(PP+QQ+RR)dz^2,\end{cases}$$

vnde ſi ſubtrahatur $\Theta^2 ds^2$, remanebit

$$\Pi\Pi ds^2=(QQ+RR)dx^2+(PP+RR)dy^2+(PP+QQ)dz^2$$
$$-2PQ dx dy-2PR dx dz-2QR dy dz,$$

quae expreſſio manifeſto reducitur ad ſummam trium ſequentium quadratorum:

$$\Pi\Pi ds^2=(P dy-Q dx)^2+(Q dz-R dy)^2+(R dx-P dz)^2.$$

§. 13. Cum igitur ſupra inuenerimus

$$P=\frac{\Theta dx}{ds}-\frac{T ddx}{ds^2};$$
$$Q=\frac{\Theta dy}{ds}-\frac{T ddy}{ds^2};$$
$$R=\frac{\Theta dz}{ds}-\frac{T ddz}{ds^2},$$ erit

$$P\,dy - Q\,dx = -\frac{T(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^2},$$
$$Q\,dz - R\,dy = -\frac{T(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^2},$$
$$R\,dx - P\,dz = -\frac{T(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^2},$$

quarum formularum quadrata inuicem addita praebebunt:

$$\Pi\Pi\,ds^2 = \frac{TT}{ds^4}\left\{\begin{array}{l} +(dy\,ddx - dx\,ddy)^2 \\ +(dz\,ddy - dy\,ddz)^2 \\ +(dx\,ddz - dz\,ddx)^2 \end{array}\right\}.$$

§. 14. Quod ſi autem radius oſculi curuae in puncto Z dicatur r, qui cadit in planum duorum elementorum contiguorum, alia occaſione oſtenſum eſt eſſe

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,ddx - dx\,ddy)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dx\,ddz - dz\,ddx)^2}}$$

ergo radio oſculi introducto erit $\Pi\Pi\,ds^2 = \frac{TT\,ds^2}{rr}$, ideoque $\Pi = \frac{T}{r}$, ita vt hoc modo ſimpliciſſime vis normalis ex ſola tenſione et radio oſculi definiatur, dum vis tangentialis, vti ante inuenimus, eſt $\Theta = -\frac{dT}{ds}$.

§. 15. Quando ergo agitur de aequilibrio fili perfecte flexilis, cui in ſingulis elementis ds applicatae ſint binae vires, altera tangentialis $= \Theta\,ds$, altera normalis $= \Pi\,ds$, quarum quidem haec cadat in planum in quo filum hoc loco incuruatur, praeterea vero tenſio in hoc loco ponatur $= T$; tum ſtatus aequilibrii his duabus aequationibus determinatur; 1°). $T = \Pi r$ et 2°.) $dT = -\Theta ds$. Quare cum ex priore ſit $dT = \Pi\,dr + r\,d\Pi$, eliſa tenſione T pro aequilibrio habebitur haec vnica aequatio: $r\,d\Pi + \Pi\,dr + \Theta\,ds = 0$; vnde ſi ambae vires Π et Θ per elementa curuae fuerint datae, haec aequatio naturam curuae determinabit. Sin autem ipſa curua fuerit data

 cum

cum altera harum virium, inde altera reperietur. Veluti ſi data ſit vis Π, erit

$$\Theta = - \frac{r\, d\, \Pi - \Pi\, dr}{ds} = - d. \frac{\Pi r}{ds};$$

ſin autem altera Θ fuerit data, tum erit $\Pi = - \int \frac{\Theta ds}{r}$.

§. 16. Hinc iam facillime problema non ita pridem tractatum, quo quaerebatur ſtatus aequilibrii funis corpori cylindrico circumplicati et vtrinque a viribus tenſi, multo generalius reſolui poterit. Quando ſcilicet totus funis non in eodem plano verſatur, atque etiam corpori cuiuscunque figurae fuerit circumuolutus, ita vt figura funis ſit cognita; tum ſi frictio ſe habeat ad preſſionem vt λ ad 1, ita vt ſit $\Theta = \lambda \Pi$, prior aequatio ſtatim praebet $r\, d\Pi + \Pi\, dr + \lambda\, \Pi\, ds = 0$, vnde ſit

$$\frac{d\Pi}{\Pi} + \frac{dr}{r} + \frac{\lambda\, ds}{r} = 0,$$

vbi cum $\frac{ds}{r}$ denotet angulum elementarem, quo bina elementa proxima incuruantur, ſi ponamus $\int \frac{ds}{r} = \Phi$, habebimus integrando $\Pi\, r\, e^{\lambda \Phi} = C$, ideoque $\Pi = \frac{C\, e^{-\lambda \Phi}}{r}$, hinc $\Theta = \frac{\lambda\, C\, e^{-\lambda \Phi}}{r}$ et ipſa funis tenſio $T = C e^{\lambda - \Phi}$. Quod ſi ergo in altero termino, vbi $\Phi = 0$, vis tendens fuerit $= M$, in altero autem termino, vbi $\Phi = \theta$, vis tendens $= N$: habebimus $M = C$, deinde $N = C\, e^{-\lambda \theta}$; vnde patet conſtantem C eſſe debere $= M$, ita vt $N = M\, e^{-\lambda \theta}$. Haec ergo ſolutio non ſolum conuenit cum ea quae nuper eſt inventa, ſed etiam multo patet latius.

§. 17.

§. 17. Quando autem funis corpori cuiuscunque figurae circumplicatur, cuius quidem ſuperficies ſit laeuigata, funis tenſus ſuper ea ad aliam figuram ſe componere nequit, niſi quae ſit breuiſſima inter ſuos terminos. Ne igitur opus ſit hanc limitationem adiungere, res ita concipi poteſt, quaſi funis per canalem in ſuperficie excauatum circumduceretur, cui proinde figuram quamcunque tribuere licebit. Praeterea vero ſi totus funis in eodem plano eſſet applicatus, tum $\int\frac{ds}{r} = \Phi$ deſignaret amplitudinem curuae a fune formatae. At ſi funis non in eodem plano applicetur, idea amplitudinis quodammodo ceſſat: interim tamen Φ denotabit ſummam omnium angulorum elementarium $\frac{ds}{r}$, etiamſi non in idem planum cadant. Caeterum hinc patet vt ante, ſi $\lambda\Pi$ totum effectum frictionis denotet preſſioni Π reſpondentem, tum aequilibrium tam diu ſubſiſtere poſſe, quamdiu vis tendens maior M non maior fuerit quam N $e^{\lambda\Phi}$.

§. 18. Solutio autem tum tantum tam ſimplex euadit, quando vires ſollicitantes ſunt vel tangentiales vel normales. Quando autem hac vires ſecundum directiones ternorum axium O A, O B, O C agunt, quas litteris P, Q, R indicauimus, ita vt eae ſint functiones ternarum coordinatarum x, y, z; tum inueſtigatio curuae, quam hac vires filo flexili inducent, multo maiori laborat difficultate, quoniam aequationes primo inuentas a formulis integralibus liberari oportet. Interim tamen adhibendis ſequentibus artificiis negotium confici ſatis commode poterit, vbi quidem etiamnunc mentem ab elaſticitate abſtrahimus.

 §. 19.

§. 19. Hic ſcilicet ſtatim in calculum introducemus ſequentes formulas analyticas:

$$\frac{dyddx - dxddy}{ds^3} = r,$$
$$\frac{dzddy - dyddz}{ds^3} = p,$$
$$\frac{dxddz - dzddx}{ds^3} = q,$$

quae litterae cum ſupra adhibitis non ſunt confundendae. Hinc igitur ſtatim radius oſculi curuae in puncto Z euadet $\frac{1}{\sqrt{pp+qq+rr}}$; deinde vero habebimus vt ſequitur:

$$\text{I. } d.\frac{dy}{dx} = -\frac{rds^3}{dx^2}; \quad \text{II. } d.\frac{dx}{dy} = +\frac{rds^3}{dy^2};$$
$$\text{III. } d.\frac{dz}{dy} = -\frac{pds^3}{dy^2}; \quad \text{IV. } d.\frac{dy}{dz} = +\frac{pds^3}{dz^2};$$
$$\text{V. } d.\frac{dx}{dz} = -\frac{qds^3}{dz^2}; \quad \text{VI. } d.\frac{dz}{dx} = +\frac{qds^3}{dx^2}.$$

Caeterum hae tres quantitates p, q, r a ſe inuicem ita pendent, vt ſit $pdx + qdy + rdz = 0$.

§. 20. His conſtitutis cum prima aequatio fuerit $dy\int Pds = dx\int Qds$, erit $\frac{dy}{dx}\int Pds = \int Qds$ et differentiando

$$-\frac{rds^3}{dx^2}\int Pds + \frac{dy}{dx}Pds = Qds,$$

vnde colligimus

$$\int Pds = \frac{-Qdx^2 + Pdxdy}{rds^2}.$$

Simili vero modo ſi aequationem $\int Pds = \frac{dx}{dy}\int Qds$ differentiemus, prodibit

$$Pds = \frac{rds^3}{dy^2}\int Qds + \frac{Qdxds}{dy};$$

vnde nanciſcimur

$$\int Qds = \frac{Pdy^2 - Qdxdy}{rds^2},$$

ſimili modo ex reliquis aequationibus deducemus

$$\int Qds = -\frac{Rdy^2 + Qdydz}{pds^2}; \quad \int Rds = \frac{Qdz^2 - Rdydz}{pds^2};$$
$$\int Rds = -\frac{Pdz^2 + Rdzdx}{qds^2}; \quad \int Pds = \frac{Rdx^2 - Pdxdz}{qds^2}.$$

§. 21.

§. 21. Quoniam igitur pro qualibet formula integrali geminos adepti ſumus valores, iis inter ſe aequatis impetrabimus ſequentes aequationes:

$$\frac{Pdy - Qdx}{r} = \frac{Rdx - Pdz}{q};$$

$$\frac{Qdx - Pdy}{r} = \frac{Rdy - Qdz}{p};$$

$$\frac{Rdy - Qdz}{p} = \frac{Pdz - Rdx}{q}.$$

quae omnes tres, ob $pdx + qdy + rdz = 0$, reuocantur ad hanc vnicam: $Pp + Qq + Rr = 0$. In hac ergo aequatione iam inſignis ſtatus aequilibrii continetur proprietas; neque tamen ea ſtatus aequilibrii penitus exhauritur, ſed inſuper alia aequatione eſt opus ad ſolutionem completam perficiendam.

§. 22. Hunc in finem accipiatur pro lubitu unus valor cuiuspiam formulae integralis, ac prima quidem erat $\int P\,ds = \frac{dx(Pdy - Qdx)}{rds^2}$, quae denuo differentiata ſumto elemento ds conſtante praebet

$$P\,ds = \frac{ddx(Pdy - Qdx)}{rds^2} + \frac{dx(Pddy - Qddx)}{rds^2} + \frac{dx(dPdy - dQdx)}{rds^2} - \frac{dxdr(Pdy - Qdx)}{rds^2},$$

quae per $rrds^2$ multiplicata ac omnibus terminis ad eandem partem translatis abit in hanc formam:

$$0 = -Prrds^3 + rddx(Pdy - Qdx) + rdx(Pddy - Qddx) + rdx(dPdy - dQdx) - drdx(Pdy - Qdx).$$

In iſta aequatione littera P ducitur in hanc formulam:

$$-rrds^3 + r(dyddx + dxddy) - drdxdy,$$

quae loco rds^3 ſubſtituto valore fit $2rdxddy - drdxdy$; at vero littera Q ducitur in $drdx^2 - 2rdxddx$, vnde tota haec aequatio per dx diuiſa erit

P(2r

$$P(2rddy-drdy)-Q(2rddx-drdx)+r(dPdy-dQdx)=0$$

ex qua colligitur

$$\frac{dr}{r}=\frac{2Qddx-2Pddy-dPdy+dQdx}{Qdx-Pdy},$$

ſiue commodius

$$\frac{dr}{r}=\frac{2Qddx+dQdx-2Pddy-dPdy}{Qdx-Pdy},$$

quae eadem aequatio etiam ex ſecunda formula $\int Q\,ds$ elicitur. Eodem igitur modo ex reliquis obtinebitur

$$\frac{dp}{p}=\frac{2Rddy+dRdy-2Qddz-dQdz}{Rdy-Qdz},$$

$$\frac{dq}{q}=\frac{2Pddz+dPdz-2Rddx-dRdx}{Pdz-Rdx}.$$

Quoniam autem vnica tantum aequatio, praeter inuentam $Pp+Qq+Rr=0$, ad aequilibrium determinandum requiritur, neceſſe eſt has tres aequationes modo inuentas ad vnicam reduci poſſe, ſi quidem in ſubſidium vocetur formula $p\,dx+q\,dy+r\,dz=0$.

§. 23. Quo haec clarius perſpiciantur in calculum introducamus tenſionem fili T, quandoquidem per eam ternas noſtras formulas integrales concinne expreſſas inuenimus: erat autem

$$\int P\,ds=-\frac{Tdx}{ds};\ \int Q\,ds=-\frac{Tdy}{ds};\ \int R\,ds=-\frac{Tdz}{ds};$$

vnde differentiando elicimus

$$P=-\frac{dTdx-Tddx}{ds^2};\ Q=-\frac{dTdy-Tddy}{ds^2};\ R=-\frac{dTdz-Tddz}{ds^2};$$

vnde colligimus pro prima noſtra aequatione

$$Qdx-Pdy=Trds \text{ et } Qddx-Pddy=-2rdsdt;$$

deinde vero hinc erit porro

$$dP=-\frac{ddTdx-2dTddx-Td^3x}{ds^2} \text{ et } dQ=-\frac{ddTdy-2dTddy-Td^3y}{ds^2};$$

vnde

vnde fit

$$dQdx - dPdy = 2rdsdT + \frac{T(dyd^3x - dxd^3y)}{ds^3},$$

quibus valoribus ſubſtitutis prima aequatio fiet $\frac{dr}{r} = \frac{(dyd^3x - dxd^3y)}{rds^3}$, et cum ſit $dyddx - dxddy = rds^3$, hinc fiet differentiando $dyd^3x - dxd^3y = drds^3$; vnde patet aequationem noſtram fieri identicam, id quod mirum non eſt, cum introducta tenſione T ipſae aequationes primitiuae

$$dy\int Pds = dx\int Qds,$$
$$dz\int Qds = dy\int Rds,$$
$$dx\int Rds = dz\int Pds,$$

iam ſint identicae. Interim tamen quaelibet trium aequationum inuentarum continet vnam determinationem neceſſariam pro ſtatu aequilibrii.

§. 24. Optime autem haec perſpicientur, ſi quaeſtionem ad caſum quendam particularem accommodemus. Conſideremus igitur filum cylindro circulari ita circumuolutum, vt in eius ſuperficie lineam breuiſſimam exhibeat, quam ergo figuram tanquam datam ſpectemus, et quaeramus vires P, Q, R, quae filo in ſingulis elementis applicatae ipſi hanc ipſam figuram inducere valeant. Sit radius iſtius cylindri $= 1$, et notum eſt pro quauis fili portione s coordinatas ita determinari, vt ſit $x = \alpha \operatorname{coſ.} s$, $y = \alpha \operatorname{ſin} s$ et $z = ns$, exiſtente $\alpha = \sqrt{1 - nn}$) ideoque n fractione vnitate minore. Hinc ergo ſumto elemento ds conſtante erit

$$dx = -\alpha ds \operatorname{ſin.} s;\ dy = \alpha ds \operatorname{coſ.} s;\ dz = nds;$$

tum vero porro

$$ddx = -\alpha ds^2 \operatorname{coſ.} s;\ ddy = -\alpha ds^2 \operatorname{ſin.} s;\ ddz = 0;$$

 vnde

vnde pro p, q, r ſequentes nanciſcimur valores:

$$p = -\alpha n \text{ ſin. } s; \quad q = \alpha n \text{ coſ. } s; \quad r = -\alpha\alpha;$$

ex quibus valoribus vtique erit $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$. Tum vero pro ſtatu aequilibrii aequatio primo inuenta praebet hanc determinationem: $Pp + Qq + Rr = 0$, quae ergo fit $-\alpha n P \text{ ſin. } s + \alpha n Q \text{ coſ. } s - \alpha\alpha R = 0$. Altera vero conditio petatur ex aequatione noſtra prima $\frac{dr}{r}$, vnde fiet

$$0 = \frac{2Q\,ds \text{ coſ. } s + dQ \text{ ſin. } s - 2P\,ds \text{ ſin. } s + dP \text{ coſ. } s}{Q \text{ ſin. } s + P \text{ coſ. } s},$$

at vero duae reliquae aequationes dabunt

$$\frac{ds \text{ coſ. } s}{\text{ſin. } s} = -\frac{2\alpha R\,ds \text{ ſin. } s + \alpha\,dR \text{ coſ. } s - n\,dQ}{\alpha R \text{ coſ. } s - nQ},$$

$$-\frac{ds \text{ ſin. } s}{\text{coſ. } s} = \frac{2\alpha R\,ds \text{ coſ. } s + \alpha\,dR \text{ ſin. } s + n\,dP}{nP + \alpha R \text{ ſin. } s}.$$

§. 25. Hae autem tres poſtremae aequationes vnicam continent determinationem, ad quod oſtendendum eas primo ad formam ſimpliciſſimam reuocemus, eritque:

$$\text{I. } 0 = 2Q\,ds \text{ coſ. } s + dQ \text{ ſin. } s - 2P\,ds \text{ ſin. } s + dP \text{ coſ. } s;$$

$$\text{II. } \alpha R\,ds \text{ coſ } s^2 - nQ\,ds \text{ coſ. } s = -2\alpha R\,ds \text{ ſin. } s^2 + \alpha\,dR \text{ ſin. } s \text{ coſ. } s - n\,dQ \text{ ſin. } s,$$

ſiue

$$\text{II. } 0 = -\alpha R\,ds\,(1 + \text{ſin. } s^2) + nQ\,ds \text{ coſ. } s + \alpha\,dR \text{ ſin. } s \text{ coſ. } s - n\,dQ \text{ ſin. } s$$

$$\text{III. } -nP\,ds \text{ ſin. } s - \alpha R\,ds \text{ ſin. } s^2 = 2\alpha R\,ds \text{ coſ. } s^2 + \alpha\,dR \text{ ſin. } s \text{ coſ. } s + n\,dP \text{ coſ. } s,$$

ſiue

$$\text{III. } 0 = \alpha R\,ds\,(1 + \text{coſ. } s^2) + nP\,ds \text{ ſin. } s + \alpha\,dR \text{ ſin. } s \text{ coſ. } s + n\,dP \text{ coſ. } s;$$

et

et quoniam prima conditio dedit

$$R = \frac{n\,Q\,\text{coſ.}\,s - n\,P\,\text{ſin.}\,s}{\alpha}, \text{ erit}$$

$$dR = \frac{n\,dQ\,\text{coſ.}\,s - n\,Q\,ds\,\text{ſin.}\,s - n\,dP\,\text{ſin.}\,s - n\,P\,ds\,\text{coſ.}\,s}{\alpha}.$$

Iam hi valores in ſecunda et tertia aequatione ſubſtituti perducent ad ipſam aequationem primam; vnde patet has tres aequationes vnicae tantum aequiualere.

§. 26. Sufficit igitur primam euoluiſſe, quae eſt

$$0 = 2\,Q\,ds\,\text{coſ.}\,s + dQ\,\text{ſin.}\,s - 2\,P\,ds\,\text{ſin.}\,s + dP\,\text{coſ.}\,s,$$

vnde patet alteram quantitatum P et Q pro lubitu accipi poſſe. Spectemus ergo quantitatem P tanquam cognitam et alteram Q quaeramus ex hac aequatione:

$$dQ\,\text{ſin.}\,s + 2\,Q\,ds\,\text{coſ.}\,s = 2\,P\,ds\,\text{ſin.}\,s - dP\,\text{coſ.}\,s,$$

quae per ſin. s multiplicata integretur, vnde prodit

$$Q\,\text{ſin.}\,s^2 = 2\int P\,ds\,\text{ſin.}\,s^2 - \int dP\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s,$$

eſt autem per reductionem notiſſimam:

$$\int dP\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s = P\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s - \int P\,ds\,(\text{coſ.}\,s^2 - \text{ſin.}\,s^2),$$

vnde erit

$$Q\,\text{ſin.}\,s^2 = -P\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ}\,s + \int P\,ds\,(\text{coſ.}\,s^2 + \text{ſin.}\,s^2)$$
$$= -P\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s + \int P\,ds,$$

ita vt ſit $Q = -\frac{P\,\text{coſ.}\,s}{\text{ſin.}\,s} + \frac{\int P\,ds}{\text{ſin.}\,s^2}$, hincque porro

$$R = -\frac{n\,P}{\alpha\,\text{ſin.}\,s} + n\,\text{coſ.}\,s\,\frac{\int P\,ds}{\alpha\,\text{ſin.}\,s^2},$$

ſicque ex aſſumta quantitate P binae reliquae Q et R determinantur; vnde patet filum infinitis modis in hoc ſitu in aequilibrio conſiſtere poſſe.

§. 27. Quando autem vna trium virium P, Q et R vt cognita ſpectatur, binae reliquae multo facilius ex ea

definire poſſunt per geminos valores quos ante pro formulis $\int P\,ds$, $\int Q\,ds$ et $\int R\,ds$ inuenimus; neque opus eſt ad vlteriorem differentiationem deſcendere. Ita ſi vis P fuerit data, tum gemini valores pro $\int P\,ds$ dati hoc caſu euadent

$$\int P\,ds = Q\,\text{ſin.}\,s^2 + P\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s = \frac{\alpha R\,\text{ſin.}\,s^2 + n P\,\text{ſin.}\,s}{n\,\text{coſ.}\,s},$$

vnde colligimus vt ante

$$Q = \frac{\int P\,ds - P\,\text{ſin.}\,s\,\text{coſ.}\,s}{\text{ſin.}\,s^2} = \frac{\int P\,ds}{\text{ſin.}\,s^2} - \frac{P\,\text{coſ.}\,s}{\text{ſin.}\,s} \text{ et}$$

$$R = \frac{n\,\text{coſ.}\,s\int P\,ds}{\alpha\,\text{ſin.}\,s^2} - \frac{n P}{\alpha\,\text{ſin.}\,s},$$

Simili modo ſi vim R pro data accipiamus, bini valores pro $\int R\,ds$ dati fient

$$\int R\,ds = \frac{-nQ}{\alpha\,\text{ſin.}\,s} + \frac{R\,\text{coſ.}\,s}{\text{ſin.}\,s} = \frac{-nP}{\alpha\,\text{coſ.}\,s} - \frac{R\,\text{ſin.}\,s}{\text{coſ.}\,s},$$

vnde reperitur:

$$P = \frac{\alpha R\,\text{ſin.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,\text{coſ.}\,s}{n}\int R\,ds \text{ et } Q = \frac{\alpha R\,\text{coſ.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,\text{ſin.}\,s\int R\,ds}{n},$$

vnde ſi fuerit, $R = 1$, quod euenit ſi axis cylindri ſit verticalis et ſingula funis elementa a grauitate vrgeantur, tum binae reliquae vires requiſitae ad aequilibrium erunt

$$P = \frac{\alpha\,\text{ſin.}\,s}{n} - \frac{\alpha(s+a)\,\text{coſ.}\,s}{n} \text{ et } Q = \frac{\alpha\,\text{coſ.}\,s}{n} - \frac{\alpha(s+a)\,\text{ſin.}\,s}{n}.$$

Ex quo patet, quaeſtionem etiamnunc eſſe indeterminatam, quoniam conſtantem a pro lubitu accipere licet.

§. 28. Quin etiam tenſionem funis in ſingulis punctis pro arbitrio ſumere licet; tum enim pro noſtro caſu, quem hic tractamus, formulae ſupra (§. 9.) exhibitae erunt

$$\int P\,ds = \alpha T\,\text{ſin.}\,s;\ \int Q\,ds = -\alpha T\,\text{coſ.}\,s;\ \int R\,ds = -nT,$$

vnde ipſae vires erunt

P =

$P = \alpha \frac{dT}{ds}$ ſin. $s + \alpha T$ coſ. s;

$Q = -\alpha \frac{dT}{ds}$ coſ. $s + \alpha T$ ſin. s;

$R = -\frac{n\,d\,T}{d\,s}$,

quo ergo caſu omnes tres vires perfecte determinantur; vnde ſi tenſio vbique debeat eſſe conſtans, ſiue $T = D$, noſtrae vires erunt $P = \alpha D$ coſ. s; $Q = \alpha D$ coſ. s; $R = 0$, atque hinc manifeſtum eſt quemadmodum omnes huiusmodi quaeſtiones tractari conueniat.

De aequilibrio filorum elaſticorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum.

§. 29. Formulae generales pro filis elaſticis datae multo commodiores reddentur introductione litterarum p, q, r, quarum valores erant poſiti

$$q = \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{ds^3};\quad q = \frac{dx\,ddz - dz\,ddx}{ds^3};\quad r = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3};$$

circa quas formulas iam ſupra notauimus fore $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$. Praeterea vero quoque euidens eſt fore $p\,ddx + q\,ddy + r\,ddz = 0$; vnde ex differentiatione prioris aequalitatis oritur $dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz = 0$, id quod etiam inde patet, quod ſumto elemento ds conſtante ſit

$$dp = \frac{dz\,d^3y - dy\,d^3z}{ds^3};$$

$$dq = \frac{dx\,d^3z - dz\,d^3x}{ds^3};$$

$$dr = \frac{dy\,d^3x - dx\,d^3y}{ds^3};$$

hinc autem inſuper ſequitur fore

$$dp\,d^3x + dq\,d^3y + dr\,d^3z = 0.$$

Has igitur inſignes relationes inter quantitates p, q, r probe notaſſe iuuabit.

 §. 30.

§. 30. Praeterea vero etiam formula irrationalis $\sqrt{(pp+qq+rr)}$ memorabilem reductionem ſuppeditat: fiet enim

$$ds^2(pp+qq+rr)=(dy^2+dz^2)ddx^2+(dx^2+dz^2)ddy^2+(dx^2+dy^2)+ddz^2$$
$$-2dxdyddxddy-2dxdzddxddz-2dydzddyddz,$$

cum igitur $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, haec formula transformabitur in ſequentem:

$$pp+qq+rr=\frac{ddx^2+ddy^2+ddz^2}{ds^4}-\frac{dx^2ddx^2-dy^2ddy^2-dz^2ddz^2}{ds^6}$$
$$-\frac{2dxdyddxddy-2dxdzddxddz-2dydzddyddz}{ds^6},$$

vbi membra negatiua manifeſto continent quadratum formulae $dxddx+dyddy+dzddz$. Eſt vero

$$dxddx+dyddy+dzddz=dsdds,$$

nullo ſcilicet elemento pro conſtante aſſumto, hoc ergo valore ſubſtituto naſcetur haec expreſſio ſatis concinna:

$$pp+qq+rr=\frac{ddx^2+ddy^2+ddz^2-dds^2}{ds^4};$$

quamobrem radius oſculi curuae ad Z generaliſſime erit $\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2+ddy^2+ddz^2-dds^2)}}$, vbi quodlibet elementum pro lubitu vt conſtans accipi poterit, ita vt valor expreſſionis hinc neutiquam pendeat, quandoquidem quouis caſu differentialia ſecundi gradus ſponte ſe mutuo tollunt. Veluti in caſu ante tractato, vbi erat

$$dx=-\alpha ds\,\text{ſin.}\,s;\; dy=\alpha ds\,\text{coſ.}\,s;\; dz=nds;$$

exiſtente $\alpha=\sqrt{(1-nn)}$, etiam elemento ds variabili ſumto, fiet

$$ddx=-\alpha dds\,\text{ſin.}\,s-\alpha ds^2\,\text{coſ.}\,s;$$
$$ddy=\alpha dds\,\text{coſ.}\,s-\alpha ds^2\,\text{ſin.}\,s;$$
$$ddz=ndds,$$

quibus valoribus ſuſtitutis reperietur:

ddx

$$ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2 = \alpha\alpha ds^4;$$

ſicque radius oſculi erit $\frac{1}{\alpha}$.

§. 31. His praenotatis, ſi G exprimat elaſticitatem abſolutam fili in ſingulis punctis, quam hic tanquam conſtantem aſſumemus, ita vt filum vbique vniformiter craſſum ſit concipiendum; tum aequationes pro aequilibrio erunt

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = G\,r.$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = G\,p.$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = G\,q,$$

quae differentiatae praebent

$$dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = G\,dr,$$

$$dz \int Q\,ds - dy \int R\,ds = G\,dp,$$

$$dx \int R\,ds - dz \int P\,ds = G\,dq.$$

§. 32. Hinc primo tam $\int Q\,ds$ quam $\int R\,ds$ per $\int P\,ds$ exprimamus eritque

$$\int Q\,ds = \frac{dy}{dx}\int P\,ds - \frac{G\,dr}{dx} \text{ et } \int R\,ds = \frac{dz}{dx}\int P\,ds + \frac{G\,dq}{dx},$$

qui valores in formula pro tenſione T data ſubſtituti praebent hanc expreſſionem:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy^2}{dx\,ds}\int P\,ds - \frac{dz^2}{dx\,ds}\int P\,ds - \frac{G\,dr\,dy}{dx\,ds} - \frac{G\,dq\,dz}{dx\,ds},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$T = -\frac{ds}{dx}\int P\,ds + \frac{G(dr\,dy - dq\,dz)}{dx\,ds},$$

vnde colligimus:

$$\int P\,ds = \frac{G(dr\,dy - dq\,dz)}{ds^2} - \frac{T\,dx}{ds}.$$

Similique modo reperietur:

ſQ

$$\int Q\, ds = \frac{G(dp\, dz - dr\, dx)}{ds^2} - \frac{T\, dy}{ds},$$

$$\int R\, ds = \frac{G(dq\, dx - dp\, dy)}{ds^2} - \frac{T\, dz}{ds}.$$

Hinc autem differentiando porro ſiet

$$P = \frac{G(dr\, ddy + dy\, ddr - dq\, ddz - dz\, ddq)}{ds^3} - \frac{T\, ddx - dT\, dx}{ds^2},$$

$$Q = \frac{G(dp\, ddz + dz\, ddp - dr\, ddx - dx\, ddr)}{ds^3} - \frac{T\, ddy - dT\, dy}{ds^3},$$

$$R = \frac{G(dq\, ddx + dx\, ddq - dp\, ddy - dy\, ddp)}{ds^3} - \frac{T\, ddz - dT\, dz}{ds^2}.$$

§. 33. Cum nunc ſit vis tangentialis, vt ſupra vidimus $= P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, quam per $\Theta\, ds$ deſignauimus, erit

$$\Theta\, ds = -G(p\, dp + q\, dq + r\, dr) - dT,$$

quare cum ſit radius oſculi curuae $= \frac{1}{\sqrt{(pp + qq + rr)}}$, ſi eum vocemus $= \varrho$, erit $pp + qq + rr = \frac{1}{\varrho\varrho}$, hincque

$$p\, dp + q\, dq + r\, dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^3},$$

quo valore ſubſtituto fiet $\Theta\, ds = \frac{G\, d\varrho}{\varrho^3} - dT$.

Quod ſi porro vim normalem pro elemento ds ſtatuamus $= \Pi\, ds$, ſupra iam vidimus fore

$$\Pi\, ds = \sqrt{((P dy - Q dx)^2 + (Q dz - R dy)^2 + (R dx - P dz)^2)},$$

vbi ſi loco P, Q, R valores ſupra exhibitos ſubſtituere vellemus, in calculos inextricabiles delaberemur.

§. 34. Quoniam modo inuenimus

$$\int Q\, ds = \frac{dy}{dx}\int P\, ds - \frac{G\, dr}{dx},$$

erit differentiando

$$Q\, ds = -\frac{r\, ds^3}{dx^2}\int P\, ds + \frac{P\, dy\, ds}{dx} - \frac{G\, ddr}{dx} + \frac{G\, dr\, ddx}{dx^2},$$

vnde colligitur

$\int P\, ds$

$$\int P\,ds = \frac{P\,dx\,dy}{r\,ds^2} - \frac{Q}{r}\,\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{G\,(dr\,ddx - dx\,ddr)}{r\,ds^3},$$ ſiue

$$\int P\,ds = \frac{dx\,(P\,dy - Q\,dx)}{r\,ds^2} + \frac{G\,(dr\,ddx - dx\,ddr)}{r\,ds^3},$$

hinc autem porro erit

$$\int Q\,ds = \frac{dy\,(P\,dy - Q\,dx)}{r\,ds^2} - \frac{G\,(dy\,ddr - dr\,ddy)}{r\,ds^3},$$

ex quibus per analogiam concludimus:

$$\int Q\,ds = \frac{dy\,(Q\,dz - R\,dy)}{p\,ds^2} + \frac{G\,(dp\,ddy - dy\,ddp)}{p\,ds^3},$$

$$\int R\,ds = \frac{dz\,(Q\,dz - R\,dy)}{p\,ds^2} - \frac{G\,(dz\,ddp - dp\,ddz)}{p\,ds^3},$$

$$\int R\,ds = \frac{dz\,(R\,dx - P\,dz)}{q\,ds^2} + \frac{G\,(dq\,ddz - dz\,ddq)}{q\,ds^3},$$

$$\int P\,ds = \frac{px\,(R\,dx - P\,dz)}{q\,ds^2} - \frac{G\,(dx\,ddq - dq\,ddx)}{q\,ds^2},$$

hocque modo pro qualibet formula integrali binos nacti ſumus valores, qui inter ſe aequati praebent aequationem a ſigno integrali liberam. Hinc igitur ſatis patet, determinationem aequilibrii pro filis elaſticis, quae a viribus quibuscunque ſollicitantur, ad calculos non parum moleſtos perducere, ita vt in genere vix quicquam vlterius praeſtare liceat quam hic eſt factum. Quamobrem pro quouis caſu oblato ac determinato diſpiciendum erit, quomodo ope formularum hic traditarum commodiſſime ad ſolutionem perueniri queat. Ceterum iam obſeruauimus motum huiusmodi filorum ne ſuſcipi quidem poſſe, antequam inſignia incrementa calculi fuerint detecta.

DE SVPERFICIEI TERRESTRIS PROIECTIONE STEREOGRAPHICA.

Auctore

NICOLAO FUSS.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Repraeſentet circulus $A z b O \beta$ globum terraqueum. Conſtituatur oculus in puncto O, loco quopiam praecipuo A, qui vulgo in centro ſuperficiei proiiciendae collocari ſolet, oppoſito, et proiiciatur ſuperficies terreſtris in planum P Q R S terram tangens in ipſo puncto A, ita vt quilibet circulus maximus per A tranſiens proiiciatur in rectam tangentem in A, quemadmodum in figura ſemicirculus $\beta A B$ proiicitur in rectam B A B, ſiue A b in AB et A γ in A Γ.

§. 2. Sit radius $CA = 1$, et ſumto in circulo verticali A b O arcu quocunque $Az = \omega$, ſi proiiciatur z in Z, per rectam O z Z, poſita diſtantia $AZ = z$, ob angulum $AOZ = \frac{1}{2}\omega$ erit

$$AZ = z = \frac{OA \cdot qz}{Oq} = \frac{2 \, ſin.\, \omega}{1 + coſ.\, \omega} = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\omega.$$

Sumto igitur puncto b in horizonte puncti A, ita vt A $b = 90°$, pro puncto proiecto B erit $\omega = 90°$, ideoque $AB = 2$ tang. $45° = 2$. Ceterum pro quacunque oculi a plano

plano proiectionis diſtantia intervallum A Z facile aſſignari poteſt. Cum enim omnes proiectiones in plana plano tangenti P Q R S parallela factae ſint ſimiles inter ſe, erit in genere pro huiusmodi plano a puncto nadir O diſtante interuallo α, radius proiectionis $z = \alpha$ tang. ω.

§. 3. Deinde euidens eſt prope ipſum punctum A gradus proiectionis gradibus in ipſa ſuperficie ſphaerica fore aequales, inde vero continuo creſcere, & prope horizontem b gradibus ſphaerae duplo fieri maiores. Porro notandum eſt, omnes reliqui circuli verticales, veluti AyO per rectas in plano proiectionis ex A eductas A Y repraeſentari, quarum inclinationes Y A z inclinationi mutuae circulorum verticalium yAz, ſiue yqz erunt aequales. Horizon autem $b\,\beta$ in proiectione per circulum repraeſentabitur, cuius centrum in A, radius vero A B $= 2$; omnesque circuli horizonti paralleli, veluti $z\,\zeta$, pariter per circulos centro A deſcriptos repraeſentabuntur, quorum radii ſe habent ad radium paralleli, vt diſtantiae planorum, in quibus deſcribuntur, a puncto O.

§ 4. Si ſecundum rectam quamcunque per punctum O tranſeuntem O F ſectio fiat ad planum tabulae normalis, ea in ſphaera abſcindet circulum minorem Omfd, cuius proiectio erit recta F K ad A B in F normalis, quae pro quouis puncto m circuli minoris ita determinatur. Ponatur arcus A$f = \zeta$, erit angulus A O F $= \frac{1}{2}\zeta$, interuallum A F $= 2$ tang. $\frac{1}{2}\zeta$, hinc O F $= 2$ ſec. $\frac{1}{2}\zeta$ et diameter circuli minoris O$f = 2$ coſ. $\frac{1}{2}\zeta$. Iam pro puncto huius ſectionis quocunque m ponatur angulus $fcm = \mu$, erit fO$m = \frac{1}{2}\mu$, ideoque erecto ex f perpendiculo $f\mu$ erit Tab. V. Fig. 2.

$$f\mu = Of \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu = 2 \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu,$$

et ob triangula $Of\mu$ et OFM ſimilia

$$Of : f\mu = OF : FM, \text{ vnde fit}$$

$$FM = \frac{f\mu \cdot OF}{Of} = \frac{2 \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu}{\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta}.$$

Hinc ſumto angulo $\mu = 90°$, punctum k ab O quadrante diſtans ita in K erit proiectum, vt ſit $FK = \frac{2}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\zeta}$, ideoque tota recta proiectionem circuli minoris exhibens erit $\frac{4}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\zeta}$. Ceterum hic notaſſe iuuabit, ſi ducatur ad punctum m arcus circuli verticalis Am, isque dicatur ω, fore $\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\omega = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\mu$, arcus vero $mf = \mu \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta$. Viciſſim autem, cognitis AF et FM, quas ponamus $AF = a$ et $FM = b$, ex proiectione ipſe circulus minor definiri poterit. Cum enim ſit $\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\zeta = \tfrac{1}{2}a$ erit

$$\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)}},$$

ideoque radius circuli minoris

$$cO = cf = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)}} \text{ et arcus}$$

$$mf = \frac{2}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)}} \,\text{A tang.}\, \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)}},$$

ob $\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{1}{2}b \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta$ hincque $\mu = 2 \,\text{A tang.}\, (\tfrac{1}{2}b \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\zeta)$.

Tab V. Fig. 3. §. 5. Conſiderentur nunc tria puncta proxima f, m, n, in ſuperficie ſphaerae, arcubus circulorum maximorum fm, nm, quos vt lineas rectas ſpectemus, iuncta, ſintque

que haec puncta proiecta rectis ex loco ſpectatoris O eductis O F, O M, O N. Ducta iam chorda A f ob triangula F A O et A f O ſimilia erit F O : A O = A O : f O, vnde fit $FO . fO = AO^2$. Simili modo eſt $MO . mO = AO^2$. ideoque $FO . fO = MO . mO$, ſiue $FO : MO = mO : fO$, conſequenter triangula O M F et O f m ſunt ſimilia, ac proinde $MF : mf = OF : Om$. Eodem modo quoque erit $MN : mn = ON : Om$, vnde combinando concluditur fore

$$MF : MN = mf : mn = OF : ON.$$

Latera igitur aeque ac areae triangulorum F M N et $f\,m\,n$ ſunt in ratione diſtantiarum a puncto O, et omnes figurae minimae in ſphaera hac proiectione per ſimiles figuras repraeſentantur.

§. 6. Deinde omnes circuli minores in ſuperficie ſphaerae deſcripti etiam in plano proiectionis per circulos repraeſentantur. Sit enim $e\,f\,g\,h$ circulus quicunque in ſphaera, et concipiatur conus verticem ſuum in loco oculi O habens, qui hunc circulum complectatur, eiusque baſis in plano proiectionis E F G H itidem erit circulus. Tab. V. Fig. 4 Cum enim $FO . fO = AO^2$ et $GO . gO = AO^2$, erit $FO : GO = gO : fO$. Coni igitur F O G et g O f ſunt ſimiles, quia ſectiones $e\,f\,g\,h$ et E F G H antiparallelae vel ſubcontrariae, ideoque ſi vna circulus, etiam altera circulus ſit neceſſe eſt. Ceterum ex analogia modo inuenta deducitur diameter proiectionis $FG = \frac{OF . fg}{Og}$.

§. 7. Dummodo igitur cognitae fuerint poſitio et radius circuli minoris in ſphaera, diameter circuli proiecti in ſe

 facil-

facilliime determinatur. Ductis enim ex centro C radiis Cf et Cg, ſi dicantur anguli $ACf = \zeta$ et $ACg = \eta$, ita vt angulus $fCg = \eta - \zeta$, erit diameter circuli minoris, hoc eſt chorda $fg = 2 \sin. \frac{\eta - \zeta}{2}$, vnde ob $OF = \frac{2}{\cos. \frac{1}{2}\zeta}$ et $Og = 2 \cos. \frac{1}{2}\eta$ erit

$$FG = \frac{2 \sin. \frac{\eta - \zeta}{2}}{\cos. \frac{1}{2}\zeta \cos. \frac{1}{2}\eta} = 2 (\text{tang.} \tfrac{1}{2}\eta - \text{tang.} \tfrac{1}{2}\zeta),$$

vti requiritur. Eſt enim

$$AF = 2 \text{ tang.} \tfrac{1}{2}\zeta \text{ et } AG = 2 \text{ tang.} \tfrac{1}{2}\eta,$$

ergo $FG = AG - AF$.

§. 8. Quaerantur areae ſuperficiei circularis in ſphaera et in proiectione, eritque poſterior area

$$= \pi (\text{tang.} \tfrac{1}{2}\eta - \text{tang.} \tfrac{1}{2}\zeta)^2,$$

pro altera vero, ob $AO = 2$ et $hk = 1 - \cos. \frac{\eta - \zeta}{2}$, erit haec area $= 2\pi (1 - \cos. \frac{\eta - \zeta}{2})$. Quod ſi igitur ſtatuatur $\zeta = -\eta$, erit pro cono recto, cuius axis eſt recta AO, area ſuperficiei ſphaericae ab hoc cono reſectae

$$2\pi (1 - \cos. \eta) = 4\pi \sin. \tfrac{1}{2}\eta^2$$

et area baſeos, ſeu circuli in proiectione $= 4\pi \text{ tang.} \frac{1}{2}\eta^2$; ergo ſunt areae ſuperficiei proiectae et proiectionis in ratione $1 : \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}\eta^2} = \cos. \frac{1}{2}\eta^2 : 1$. Hinc ſi $\eta = 90°$, haec ratio erit $\frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$.

Tab V. Fig. 5. §. 9. Sit iam p polus terrae eiusque diſtantia a zenith A, ſeu arcus $Ap = h$ et radius circuli paralleli curui-

curuilineus, ſiue arcus $pf = pe = g$, erunt arcus $Ae = h - g$ et $Af = h + g$. Quod ſi iam hic parallelus proiiciatur in planum, pro punctorum p, e, f proiectione P, E, F habebimus

$$AP = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} h,$$

$$AT = 2 \text{ tang. } \tfrac{h+g}{2},$$

$$AE = 2 \text{ tang. } \tfrac{h-g}{2},$$

vnde colligitur diameter circuli parallelum in mappa referentis, ſcilicet

$$EF = AF - AE = 2 \left(\text{tang. } \tfrac{h+g}{2} - \text{tang. } \tfrac{h-g}{2}\right),$$

et diſtantia centri a centro proiectionis

$$IA = \tfrac{AF + AE}{2} = \text{tang. } \tfrac{h+g}{2} + \text{tang. } \tfrac{h-g}{2}.$$

Hoc igitur modo parallelus quicunque facile deſcribi poterit.

§. 10. Sint p et p' ambo poli in ſphaera, et vt ante $Ap = h$, ita vt $Ap' = 180° - h$. Proiiciantur hi poli in planum in P et P', eritque recta PP' proiectio meridiani pAp' per zenith A tranſeuntis, eiusque longitudo, ob $AP = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} h$ et $AP' = 2 \text{ cot. } \tfrac{1}{2} h$, erit Tab. VI. Fig. 1.

$$PP' = AP + AP' = 2 (\text{tang } \tfrac{1}{2} h + \text{cot. } \tfrac{1}{2} h) = 4 \text{ coſec. } h,$$

quae recta ſimul erit chorda omnium meridianorum communis. Sit nunc $p'rp$ alius meridianus quicunque a meridiano $p'Ap$ declinans angulo $Apr = \theta$: ſi huic meridiano in mappa reſpondeat arcus P'RP, exiſtente R proiectione puncti r, neceſſe eſt vt etiam angulus $APR = \theta$. Biſecetur nunc recta P'P in K, eritque interuallum KP $= KP' = 2$ coſec. h. Ex K demittatur perpendiculum KΓ, puncto Γ ita ſumto vt angulus KΓP ſit angulo

APR

A P R aequalis, eritque $R P \Gamma = 90°$, ideoque Γ centrum meridiani quaeſiti in mappa P′ R P. Erit igitur

$$K \Gamma = K P \text{ tang. } K P \Gamma = 2 \text{ coſec. } h \text{ cot. } \theta,$$

hincque radius

$$P \Gamma = P' \Gamma = 2 \text{ coſec. } h \text{ coſec. } \theta.$$

Harum formularum ope facile erit pro quacunque declinatione θ meridianum in proiectione deſcribere, hocque modo omnia abſoluimus, quae vulgo in tractatione proiectionis ſtereographicae occurrere ſolent. Operae igitur pretium videtur, haec omnia ad proiectionem polarem et aequatoream applicare, tabulasque adiungere, quarum ope conſtructio mapparum his proiectionibus ſuperſtructarum ſubleuetur.

Proiectio polaris.

Tab. V. Fig. 1.

§. 11. Quod ſi iam ſtatuatur polus in ipſo zenith A, ita vt $A p = h = 0$, et quaeratur proiectio parallelorum et meridianorum, figura prima huic caſui eſt accommodata. Poſita enim pro loco quocunque z eleuatione poli $A z = g$, erit recta A Z proiectio meridiani loci z et ſimul radius paralleli $z y \zeta$ in proiectione, cuius valor eſt $A Z = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} g$, ob $h = 0$. Tum vero erit radius meridiani $2 \text{ coſec. } h \text{ coſec. } \theta = \infty$. Haec igitur proiectio cui conſtruendae prima tabula inſeruiet, refert hemiſphaerium polare, vbi omnes rectae ex A eductae ſunt meridiani, paralleli vero circuli concentrici ex A radio $= 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} g$ deſcripti, exiſtente radio paralleli in ſphaera $= \text{ſin. } g$.

tang.

Elev. Aequat.	Radius Paralleli in Sphaer	Radius Paralleli in proi.	Quant. gradus.	Elev. Aequat	Radius Paralleli in Sphaer.	Radius Paralleli in proi.	Quant. gradus.
1°	0,0175	0,0175	0,0174	46°	0,7193	0,8489	0,0207
2	0,0349	0,0349	0,0174	47	0,7313	0,8696	0,0208
3	0,0523	0,0523	0,0175	48	0,7431	0,8904	0,0210
4	0,0698	0,0698	0,0175	49	0,7547	0,9114	0,0212
5	0,0872	0,0873	0,0175	50	0,7660	0,9326	0,0213
6	0,1045	0,1048	0,0175	51	0,7771	0,9539	0,0216
7	0,1219	0,1223	0,0175	52	0,7880	0,9755	0,0217
8	0,1392	0,1398	0,0176	53	0,7986	0,9972	0,0218
9	0,1564	0,1574	0,0176	54	0,8090	1,0190	0,0221
10	0,1736	0,1750	0,0176	55	0,8191	1,0411	0,0223
11	0,1908	0,1926	0,0176	56	0,8290	1,0634	0,0225
12	0,2079	0,2102	0,0177	57	0,8386	1,0859	0,0227
13	0,2249	0,2279	0,0177	58	0,8480	1,1086	0,0229
14	0,2419	0,2456	0,0177	59	0,8572	1,1315	0,0232
15	0,2588	0,2633	0,0178	60	0,8660	1,1547	0,0234
16	0,2756	0,2811	0,0178	61	0,8746	1,1781	0,0236
17	0,2924	0,2989	0,0179	62	0,8829	1,2017	0,0239
18	0,3090	0,3168	0,0179	63	0,8910	1,2256	0,0241
19	0,3256	0,3347	0,0180	64	0,8988	1,2497	0,0244
20	0,3420	0,3527	0,0180	65	0,9063	1,2741	0,0247
21	0,3584	0,3707	0,0180	66	0,9135	1,2988	0,0250
22	0,3746	0,3887	0,0182	67	0,9205	1,3238	0,0252
23	0,3907	0,4069	0,0182	68	0,9271	1,3490	0,0256
24	0,4067	0,4251	0,0183	69	0,9336	1,3746	0,0258
25	0,4226	0,4434	0,0183	70	0,9397	1,4004	0,0262
26	0,4384	0,4617	0,0184	71	0,9455	1,4266	0,0265
27	0,4540	0,4801	0,0185	72	0,9511	1,4531	0,0268
28	0,4695	0,4986	0,0186	73	0,9563	1,4799	0,0272
29	0,4848	0,5172	0,0187	74	0,9613	1,5071	0,0275
30	0,5000	0,5359	0,0187	75	0,9659	1,5346	0,0279
31	0,5150	0,5546	0,0189	76	0,9703	1,5625	0,0284
32	0,5299	0,5735	0,0189	77	0,9744	1,5909	0,0286
33	0,5446	0,5924	0,0191	78	0,9781	1,6195	0,0292
34	0,5591	0,6115	0,0191	79	0,9816	1,6487	0,0295
35	0,5735	0,6306	0,0192	80	0,9848	1,6782	0,0300
36	0,5878	0,6495	0,0194	81	0,9877	1,7082	0,0304
37	0,6018	0,6692	0,0194	82	0,9902	1,7386	0,0308
38	0,6157	0,6886	0,0196	83	0,9925	1,7694	0,0314
39	0,6293	0,7082	0,0197	84	0,9945	1,8008	0,0319
40	0,6428	0,7279	0,0199	85	0,9962	1,8327	0,0323
41	0,6561	0,7478	0,0199	86	0,9976	1,8650	0,0329
42	0,6691	0,7677	0,0201	87	0,9986	1,8979	0,0335
43	0,6820	0,7878	0,0202	88	0,9993	1,9314	0,0340
44	0,6947	0,8080	0,0204	89	0,9998	1,9654	0,0346
45	0,7071	0,8284	0,0205	90	1,0000	2,0000	

Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Diſtant. Centri.	Radius Merid.	Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Diſtant. Centri.	Radius Merid.
1°	0,0349	2,0003	114,5974	46°	2,0711	2,8791	2,7803
2	0,0698	2,0012	57,3074	47	2,1447	2,9325	2,7346
3	0,1048	2,0027	38,2146	48	2,2212	2,9889	2,6913
4	0,1398	2,0049	28,6710	49	2,3007	3,0485	2,6500
5	0,1750	2,0076	22,9474	50	2,3835	3,1114	2,6108
6	0,2102	2,0110	19,1335	51	2,4698	3,1780	2,5735
7	0,2456	2,0150	16,4110	52	2,5599	3,2485	2,5380
8	0,2811	2,0196	14,3706	53	2,6541	3,3233	2,5043
9	0,3168	2,0249	12,7849	54	2,7528	3,4026	2,4721
10	0,3527	2,0308	11,5175	55	2,8563	3,4869	2,4415
11	0,3887	2,0374	10,4817	56	2,9651	3,5766	2,4124
12	0,4251	2,0447	9,6195	57	3,0797	3,6721	2,3847
13	0,4617	2,0526	8,8908	58	3,2005	3,7741	2,3583
14	0,4986	2,0612	8,2671	59	3,3285	3,8832	2,3333
15	0,5359	2,0705	7,7274	60	3,4641	4,0000	2,3094
16	0,5735	2,0806	7,2559	61	3,6081	4,1253	2,2867
17	0,6115	2,0914	6,8406	62	3,7614	4,2601	2,2651
18	0,6498	2,1029	6,4721	63	3,9252	4,4054	2,2446
19	0,6886	2,1152	6,1431	64	4,1006	4,5623	2,2252
20	0,7279	2,1283	5,8476	65	4,2890	4,7324	2,2067
11	0,7677	2,1423	5,5808	66	4,4921	4,9172	2,1893
22	0,8080	2,1571	5,3389	67	4,7117	5,1186	2,1727
23	0,8489	2,1727	5,1186	68	4,9502	5,3389	2,1571
24	0,8904	2,1893	4,9172	69	5,2102	5,5808	2,1423
25	0,9326	2,2067	4,7324	70	5,4949	5,8467	2,1283
26	0,9755	2,2252	4,5623	71	5,8084	6,1431	2,1152
27	1,0190	2,2446	4,4054	72	6,1554	6,4721	2,1029
28	1,0634	2,2651	4,2601	73	6,5417	6,8406	2,0914
29	1,1086	2,2867	4,1253	74	6,9748	7,2559	2,0806
30	1,1547	2,3094	4,0000	75	7,4641	7,7274	2,0705
31	1,2017	2,3333	3,8832	76	8,0216	8,2671	2,0612
32	1,2497	2,3583	3,7741	77	8,6629	8,8908	2,0526
33	1,2988	2,3847	3,6721	78	9,4093	9,6192	2,0447
34	1,3490	2,4124	3,5766	79	10,2891	10,4817	2,0374
35	1,4004	2,4415	3,4869	80	11,3426	11,5175	2,0308
36	1,4531	2,4721	3,4026	81	12,6275	12,7849	2,0249
37	1,5071	2,5043	3,3233	82	14,2307	14,3706	2,0196
38	1,5625	2,5380	3,2485	83	16,2887	16,4110	2,0150
39	1,6195	2,5735	3,1780	84	19,0287	19,1335	2,0110
40	1,6782	2,6108	3,1114	85	22,8600	22,9474	2,0076
41	1,7386	2,6500	3,0485	86	28,6013	28,6710	2,0049
42	1,8008	2,6913	2,9889	87	38,1623	38,2146	2,0027
43	1,8650	2,7346	2,9325	88	57,2725	57,3074	2,0012
44	1,9314	2,7803	2,8791	89	114,5799	114,5974	2,0003
45	2,0000	2,8284	2,8284	90	∞	∞	2,0000

Proiectio aequatorea.

§. 12. Ponatur arcus $A p = h = 90°$, eruntque poli p, p' in horizonte, eorumque proiectio P, P′ in mappa aequaliter a puncto A diſtabit; erit enim $AP = AP' = 2$, ideoque recta P P′, quae proiectionem refert meridiani $p' A p$, erit $PP' = 4$, quae ſimul eſt chorda omnium meridianorum communis, quorum radius P Γ ita determinatur: $P\Gamma = 2 \operatorname{coſec.} \theta$, exiſtente inclinatione a meridiano per A tranſeunte $= \theta$. Omnes hi meridiani P′ S P a parallelis M E N, M′ E′ N′, parallelorum $e\, g\, f$, $e'\, g'\, f'$ proiectis, ad angulos rectos interſecantur, pro quibus eſt Tab. VI. fig. 2.

$$A E = 2 \operatorname{tang.} (45° - \tfrac{1}{2} g);$$
$$A F = 2 \operatorname{tang.} (45° + \tfrac{1}{2} g),$$

hinc $E F = 4 \operatorname{tang.} g$ et radius paralleli $E I = 2 \operatorname{tang.} g$ exiſtente $g = p e = p f$. Diſtantia denique centri a zenith eſt $A I = 2 \operatorname{ſec.} g$. His formulis ſuperſtructa eſt ſecunda tabula ad conficienda Hemiſphaeria ſuperius et inferius dicta, quibusque vulgo mappae generales globi terraquei repraeſentari ſolent.

Pro quarta columna huius tabulae, radium meridiani exhibens, notandum eſt eius argumentum non eſſe eleuationem aequatoris, ſed inclinationem meridiani cuiuslibet a meridiano per zenith tranſeunte, ad quam igitur numeri graduum in prima columna occurrentes ſunt pro quarta columna referendi, cui argumentum particulare adiicere ſuperfluum viſum eſt.

§. 13. Conſideretur punctum paralleli quodcunque v, quod proiectum cadat in V, vocetur que angulus $e p v = s$ Tab. V. fig. 5.

et in proiectione EIV $=$ S, et inueſtigetur relatio inter S et s, ſiue ex cognito angulo s angulus ipſi in proiectione reſpondens S determinetur. Hunc in finem ponatur arcus verticalis A$v = v$, atque ex triangulo ſphaerico Apv, in quo dantur arcus A$p = h$, $pv = g$ et angulus A$pv = s$ deducitur

$$\text{coſ.}\, v = \text{coſ.}\, g \,.\, \text{coſ.}\, h + \text{ſin.}\, g\, \text{ſin.}\, h\, \text{coſ.}\, s,$$

quo inuento habebitur recta Ov, cum ſit AO$v = \frac{1}{2} v$ et O$v = 2\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2} v$; vnde porro, ob O$v$.OV $=$ OA² deducitur OV $= \frac{2}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} v}$. Iam cum ſit $ef = 2g$, erit chorda huius arcus $2\, \text{ſin.}\, g$, ideoque radius plani circulum minorem evf abſcindentis $= \text{ſin.}\, g$, vnde concludimus fore arcum $ev = s\, \text{ſin.}\, g$; in proiectione vero eſt arcus EV $=$ S.IE, quorum iam arcuum ev et EV elementa debent eſſe in ratione diſtantiarum a puncto O.

§. 14. Supra §. 11. inuenimus eſſe

$$\text{E F} = 2\left(\text{tang.}\, \tfrac{h+g}{2} - \text{tang.}\, \tfrac{h-g}{2}\right).$$

Eſt vero

$$\text{tang.}\, a - \text{tang.}\, b = \frac{\text{ſin.}\, a}{\text{coſ.}\, a} - \frac{\text{ſin.}\, b}{\text{coſ.}\, b} = \frac{\text{ſin.}\,(a-b)}{\text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b},\ \text{ſiue}$$

$$\text{tang.}\, a - \text{tang.}\, b = \frac{2\,\text{ſin.}\,(a-b)}{\text{coſ.}\,(a-b) + \text{coſ.}\,(a+b)};$$

expreſſio igitur pro diametro paralleli proiecti transformatur in hanc:

$$\text{E F} = 2\,\text{I E} = \frac{4\,\text{ſin.}\, g}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, h},$$

qua in vſum vocata ad ſequentem perducimur analogiam

$$d\, s\ \text{ſin.}\, g : \frac{2\, d\, \text{S}\ \text{ſin.}\, g}{\text{coſ.}\, g + \text{coſ.}\, h} = \text{O}\, v : \text{O V} = 1 : \frac{1}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2} v},$$

ex

ex qua conficitur haec aequatio:

$$d\,S = \frac{d\,s\,(\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h)}{2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,v^2} = \frac{d\,s\,(\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h)}{1 + \text{coſ.}\,v},$$

ſiue

$$d\,S = \frac{d\,s\,(\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h)}{1 + \text{coſ.}\,g\,\text{coſ.}\,h + \text{ſin.}\,g\,\text{ſin.}\,h\,\text{coſ.}\,s},$$

atque ex hac aequatione ope integrationis valorem ipſius arcus S erui oportet, quod negotium ſequenti modo commodiſſime perficitur.

§. 15. Ponatur breuitatis gratia

$$1 + \text{coſ.}\,g\,\text{coſ.}\,h = p \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,g\,\text{ſin.}\,h = q,$$

eritque

$$d\,S = \frac{(\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h)\,d\,s}{p + q\,\text{coſ.}\,s}, \text{ vnde fit}$$

$$S = (\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h)\int \frac{d\,s}{p + q\,\text{coſ.}\,s}.$$

Statuatur porro $\text{coſ.}\,s = \frac{1 - z\,z}{1 + z\,z}$, eritque $\text{ſin.}\,s = \frac{2\,z}{1 + z\,z}$ et $d\,s\,\text{coſ.}\,s = \frac{2\,(1 - z\,z)\,d\,z}{(1 + z\,z)^2}$, ideoque $d\,s = \frac{2\,d\,z}{1 + z\,z}$. His valoribus ſubſtitutis formula integranda erit

$$\int \frac{d\,s}{p + q\,\text{coſ.}\,s} = 2\int \frac{d\,z}{p\,(1 + z\,z) + q\,(1 - z\,z)},$$

quae ita repraeſentetur concinnius:

$$\int \frac{d\,s}{p + q\,\text{coſ.}\,s} = \int \frac{d\,z}{p + q + (p - q)\,z\,z}.$$

Cum igitur nouerimus eſſe

$$\int \frac{d\,x}{b\,b + a\,a\,x\,x} = \frac{1}{a\,b}\,\text{A tang.}\,\frac{a\,x}{b}, \text{ erit}$$

$$\int \frac{d\,s}{p + q\,\text{coſ.}\,s} = \frac{2}{\sqrt{(p\,p - q\,q)}}\,\text{A tang}\;z\,\sqrt{\frac{p - q}{p + q}},$$

ideoque

$$S = \frac{\text{coſ.}\,g + \text{coſ.}\,h}{\sqrt{(p\,p - q\,q)}}\,.\,2\,\text{Arc. tang.}\;z\,\sqrt{\frac{p + q}{p - q}}.$$

§. 16.

§. 16. Iam vero notetur eſſe

$$pp = 1 + 2 \operatorname{coſ.} g \operatorname{coſ.} h + \operatorname{coſ.} g^2 \operatorname{coſ.} h^2 \text{ et}$$
$$qq = (1 - \operatorname{coſ.} g^2)(1 - \operatorname{coſ.} h^2),$$

conſequenter

$$pp - qq = \operatorname{coſ.} g^2 + \operatorname{coſ.} h^2 + 2 \operatorname{coſ.} g \operatorname{coſ.} h, \text{ et}$$
$$\sqrt{(pp - qq)} = \operatorname{coſ.} g + \operatorname{coſ.} h.$$

Tum vero eſt

$$p - q = 1 + \operatorname{coſ.} (g + h) = 2 (\operatorname{coſ.} \tfrac{g + h}{2})^2 \text{ et}$$
$$p + q = 1 + \operatorname{coſ.} (g - h) = 2 (\operatorname{coſ.} \tfrac{g - h}{2})^2, \text{ ideoque}$$
$$\sqrt{\frac{p - q}{p + q}} = \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g - h)}. \text{ Denique eſt}$$
$$z = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{coſ.} s}{1 + \operatorname{coſ.} s}} = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s.$$

His omnibus ſubſtitutis obtinebitur haec relatio inter S et s:

$$S = 2 \operatorname{Arc.} \operatorname{tang.} \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g - h)} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s, \text{ ſiue}$$
$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} S = \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(g - h)} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s,$$

cuius ope pro quouis puncto v paralleli cuiuscunque punctum ipſi reſpondens V in proiectione definiri poterit.

Tab. V. Fig. 1. §. 17. Sit $h = 0$, erit polus in puncto A, quo caſu, vt ſupra vidimus, paralleli proiecti ſunt circuli concentrici. Hoc ergo caſu erit $\operatorname{tang.} \frac{1}{2} S = \operatorname{tang.} \frac{1}{2} s$, ſiue $S = s$, hoc eſt $YAZ = yqz$, vti requiritur.

Tab. VI. fig. 3. §. 18. Sit $pe = pf = g = 90°$, erit ef aequator, pro cuius proiectione eſt

AP

$AP = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} h$,

$AE = 2 \text{ tang. } (\frac{1}{2} h - 45^\circ) = - 2 \text{ tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} h)$,

$AF = 2 \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} h)$,

$AI = 2 \text{ tang. } h$,

$IE = IF = \frac{2}{\text{coſ. } h}$.

Relatio autem inter angulos $epv = s$ et $EIV = S$ hac aequatione exprimitur:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\text{coſ. } (45^\circ + \frac{1}{2} h)}{\text{coſ. } (45^\circ - \frac{1}{2} h)} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} s,$$

quae, introducendo anguli h complementum, quod ſit m, ita reducitur: $\text{tang. } \frac{1}{2} S = \text{tang. } \frac{1}{2} m \times \text{tang. } \frac{1}{2} s$.

§. 19. Si fuerit $Ap = h = 90^\circ$, ideoque recta A O aequator, conſideretur in parallelo $e' g' f'$ punctum quodcunque v', pro quo ſit eleuatio aequatoris $p' v' = p' e' = p' f' = g$ et diſtantia a primo meridiano $A p' O$, ſeu arcus $e' v' = s$, et proiecto puncto v' in V' relatio inter angulos $E' I' V'$ et $e' p' v'$ hac aequatione exprimetur: Tab. VI. fig. 2.

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\text{coſ. } (\frac{1}{2} g + 45^\circ)}{\text{coſ. } (\frac{1}{2} g - 45^\circ)} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} s,$$

ſiue introducendo loco eleuationis aequatoris $p' e' = g$, eleuationem poli, ſeu latitudinem loci v', ſcil. $A e' = k$, erit $g = 90^\circ - k$, ergo $\text{tang. } \frac{1}{2} S = \text{tang. } \frac{1}{2} k \times \text{tang. } \frac{1}{2} s$. *Inter arcus parallelorum in ſphaera et in proiectione haec ergo inſignis ſubſiſtit relatio, vt ſemi-arcuum tangentes ſint in ratione tangentis ſemi-eleuationis poli.* Huic igitur formulae maxime notatu dignae ſuperſtructa eſt tabula tertia ampliſſima momentis proiectionis aequatoreae addenda, cuius argumenta ſunt longitudo et latitudo loci propoſiti v'.

§. 20. Haec quidem tabula, angulos E I V exhibens, ad vſus practicos nec admodum neceſſaria videtur, nec ſatis accommodata. Cum enim vſus circini Practicis merito potior ſit minus certa angulorum menſura, conſultius forſan fuiſſet chordam E V in tabula expoſuiſſe. Verum haec chorda ſubſidio binarum poſtremarum tabularum facillime determinatur. Eſt enim chorda haec $EV = IV \sin. \frac{1}{2} EIV$; vnde res tantum eo redit, vt ſinus ſemiſſis angulorum praecedentis tabulae in radios parallelorum, quos tabula antecedens ſiſtit, ducantur, qui calculus, ſi vſus poſcat, facile perficere poterit.

§. 21. Non inutile videtur hic coronidis loco ſequens Problema addidiſſe:

Tab. VI. Fig. 4. *Data diſtantia duorum locorum* x *et* y *a puncto* O, *nec non diſtantia punctorum proiectorum* XY *in mappa, invenire diſtantiam locorum in ſphaera.*

Huius problematis ſolutio hac aequatione continetur:

$$\sin. \tfrac{1}{2}\, xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^3},$$

cuius veritatem ita oſtendo. Cum ſit $Ox . OX = Oy . OY$, triangula Oxy et OYX erunt ſimilia, conſequenter $xy : Oy = XY : OX$, vnde deducitur $xy = \frac{XY \,.\, Oy}{OX}$. Eſt vero $OX = \frac{OA^2}{Ox}$, ideoque $xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^2}$; vnde cum ſit chorda $xy = OA \sin. \frac{1}{2} xCy = OA \sin. \frac{1}{2} xy$, erit

$$\sin. \tfrac{1}{2}\, xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^3}.$$

PHY-

PHYSICA.

REFLEXIONS
SUR L'ANCIENNETÉ RELATIVE DES ROCHES
ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

par
J. J. FERBER.

Premiere Section.

§. 1.

Si l'hiſtoire des hommes & de leurs établiſſemens politiques ſe perd dans l'obſcurité des ſiecles, & ne fournit guère que des fables & des traditions douteuſes ſur l'origine, les migrations & les premiers exploits des peuples; il n'eſt pas étonnant que l'hiſtoire ancienne de la terre ſoit encore plus imparfaite, & nous laiſſe dans l'ignorance ſur l'état primitif de notre globe. Ayant ſans doute été produit avant qu'aucun être humain n'eût exiſté, perſonne n'a pû aſſiſter aux grands événemens phyſiques qui en occaſionnoient & accompagnoient la formation, après que l'Architecte de l'Univers, par un effet de ſa puiſſance, avoit tiré du néant les premiers élemens de matiere qui en devoient compoſer la pâte. Il eſt donc impoſſible d'en avoir quelque relation autentique. Celle

de Moïſe n'étant ſûrement pas inſérée au livre de la Geneſe pour nous inſtruire de la Géographie phyſique, il me paroit hors de propos d'y vouloir puiſer des lumieres que l'auteur lui même ne ſe propoſoit pas d'y répandre. Indiquant les effets & les productions ſucceſſives de la création, il n'entre pas dans l'expoſé des cauſes & des moyens phyſiques qui leur donnoient naiſſance & agiſſoient ſuivant le plan & l'ordre préſcrit par le Créateur. Tous ceux qui tâchent de fonder leurs théories géonétiques ſur le récit de Moïſe, ſe trouvent par conſéquent dans la néceſſité de ſupléer par leurs commentaires à ce qu'y manque & d'expliquer le ſens du texte à leur gré là où il eſt emblematique. Il arrive de là que leurs tentatives n'aboutiſſent à rien, ſi non à donner leurs propres idées pour celles de Moïſe & à les faire valoir ſous l'autorité de l'Ecriture ſainte. L'objet de la révélation étant plus ſublime & d'un autre genre que celui du reſte des connoisſences humaines, il ne faut pas y chercher des éclairciſſemens étrangers à ſon but, ſur la formation de la terre non plus que ſur l'Aſtronomie, la Chronologie ou la prétendue transmutation des métaux, dont pluſieurs alchymiſtes ont crû trouver la clef dans certains paſſages de l'Ecritûre.

§. 2. Le défaut de mémoires dont nous venons de parler, touchant la formation de la terre & ſon état primitif, ſe manifeſte également, quand il eſt queſtion des changemens ſucceſſifs que notre globe a eſſuyés. Les révolutions qu'il a éprouvées dans ſon enfance, ou bientot aprés ſa formation, nous ſont abſolument inconnues, & même parmi celles qui ſont arrivées dans les ſiecles moins recu-

reculés, il n'y en a que quelques unes, dont l'hiſtoire ou la tradition nous ait transmis quelque monument, mais toujours trop défectueux pour nous donner la moindre ſatisfaction. On peut même ſoutenir, qu'il n'y a aucune relation des tems antérieurs au ſiecle préſent (pour ne pas raccourcir davantage ce terme) qui rempliſſe ſon but & nous inſtruiſe ſuffiſamment de l'événement dont elle traite, ſoit pour en connoitre l'effet, plus ou moins étendû à la ſurface de la terre, ſoit pour juger des cauſes qui l'ont produit & pour en éclaircir la théorie phyſique. On n'en eſt point ſurpris, quand on reflechit qu'il n'y-a que peu de tems qu'on a cultivé avec ſuccés la Minéralogie, la Chymie & la Géographie phyſique. L'Ethna, le Veſuve, & d'autres Volcans ont jetté du feu & lancé des laves & des cendres depuis bien des ſiecles. On ignore pourtant abſolument l'époque du commencement de leurs éruptions; & ſi quelques auteurs ont marqué le jour, la durée & la force de quelques unes arrivées dans les derniers ſiecles, il s'en faut de beaucoup, que leurs relations nous mettent au fait des ravages que les pays, où ces Volcans ſont ſitués, ont ſoufferts d'un tems à l'autre, & quel en étoit à chaque repriſe l'effet ſur les environs. Quant à la théorie des Volcans, on ſait que ce n'eſt que depuis peu qu'on a pû en établir une aprés l'examen de ces montagnes & des diverſes productions qu'elles rejettent ou vomiſſent. Combien de Volcans éteints ont vomi de leur ſein des torrents de lave & de feu; combien de tremblemens de terre ont ſecoué le globe dans les ſiecles les plus reculés, dont l'hiſtoire & les chroniques les plus anciennes gardent le plus profond ſilence! on a de tout tems exploité des mines en différents pays; mais ce n'eſt que de nos

jours qu'on s'applique à l'étude des montagnes, qu'on examine la compoſition & l'arrangement de leurs maſſes & les changemens, bouleverſemens & écroulemens qui leur arrivent. Chaque débordement d'un fleuve excite à preſent l'attention des Naturaliſtes qui s'empreſſent de remarquer les effets qui en réſultent & de les transmettre à la poſtérité. Les deſcriptions géographiques, topographiques & politiques qu'on publie actuellement presque de toutes les provinces, ſerviront auſſi un jour à informer la poſterité de l'état dans lequel ſe trouvoit la ſurface de la terre au 18^{ieme} ſiecle, au lieu que la Géographie ancienne nous inſtruit fort peu & fort mal du phyſique des pays dans les tems qui en ſont l'objet. Si depuis le commencement du monde il y avoit eu des obſervateurs habiles & attentifs à toutes les cataſtrophes plus ou moins univerſelles que notre globe a eſſuyées; s'ils les avoient conſignées dans les faſtes de l'hiſtoire avec le même zéle, avec lequel on nous a conſervé la mémoire des meurtres, des cruautés & des égaremens du genre humain; ſi enfin ces monumens avoient échappé aux ravages du tems & à la barbarie des conquerans: nous aurions à préſent ce qui nous manque abſolument, l'Hiſtoire complette de la terre, la Chronologie phyſique de ſes révolutions.

§. 3. Dépourvûs comme nous le ſommes de toute relation exacte en ce genre, nous n'avons qu'un ſeul moyen de juger de la conſtitution primordiale de notre globe & des chocs qui l'ont agité; c'eſt d'examiner attentivement l'état actuel de ſa croute & de voir, ſi on n'y trouve pas quelques traces de l'ancienne diſpoſition des matieres, de leur altération ou translocation occaſionnée

par

par les cataſtrophes ignorées, avec des indices des cauſes capables d'avoir produit de pareils effets. Remontant ainſi la matiere, nous arriverons à ſes ſources, ſans doute avec beaucoup de peine; mais l'objet eſt trop intereſſant & trop digne de la curioſité de l'homme qui raiſonne, pour l'abandonner à cauſe des difficultés qui ſe préſentent, ſurtout quand il y a apparence de les ſurmonter. Nous parviendrons par ces recherches à des vérités qui doivent intereſſer tout habitant de la terre, qui ſe ſoucie de connoître le domicile où il ſe trouve fixé pour quelque tems, dans des vûes plus nobles aſſurement que pour y vegéter dans l'inaction ou l'indifference. Ces recherches avanceront encore nos connoiſſances en Minéralogie & dans l'art d'exploiter les mines, à meſure, qu'au lieu de travailler au hazard, nous dévélopperons les rapports & remarquerons la diſpoſition des différentes roches qui cachent ou environnent les métaux, les ſels & d'autres foſſiles utiles.

Je n'ignore pas qu'il y a des ſavans qui, effrayés de la peine de fouiller les archives de la nature, trouvent plus commode de forger quelque hypotheſe géonétique, à l'aide de laquelle ils peuvent tout expliquer, même jusqu'aux moindres circonſtances de la formation du globe & les moindres changemens qu'il a ſubi depuis. L'eau, le feu & tous les élemens, ainſi que toutes les forces actives de la nature, ſe prêtent facilement a leurs idées. Ils ſçavent remplir adroitement les lacunes de l'hiſtoire par leurs propres conjectures & accommoder à leur ſyſteme les obſervations réelles, faites par d'autres phyſiciens, non obſtant qu'elles ſe trouvent ſouvent en contradiction ouverte avec leurs aſſertions.

 Don-

Donnant une forme agréable à leurs ouvrages & y jettant un certain interét par la beauté du ſtile & quelques ſaillies, hazardées à propos, ils ſont ſurs de trouver des partiſans, qui ſe laiſſent éblouir par leur éloquence quand ils ont l'imagination bien échauffée. Il eſt certain, que ces auteurs nous apprennent plus dans un quart d'heure que tous les obſervateurs réunis ne nous diront peut-étre dans pluſieurs ſiecles à venir. Mais ſauf tout égard dû à leurs talents & à leur génie, il eſt bon de remarquer, que ce n'eſt pas un roman phyſique & amuſant, ou la deſcription d'un monde qui n'exiſte pas, que nous deſirons. Il s'agit au contraire de connoître le monde réel, tel qu'il eſt en effet & tel qu'il étoit anciennement. Il ne faut donc pas imaginer, mais découvrir & étudier ſon état préſent & tâcher d'en tirer des conſéquences juſtes ſur le paſſé. L'inverſion de cet ordre nous feroit anticiper les concluſions & nous mettrions les réſultats, ou ce qui devroit reſulter, à la place des prémiſſes ou principes, ce qui eſt le moyen le plus ſûr de tomber dans l'erreur & de ne ſavoir rien avec certitude. Tenons nous donc aux obſervations & voyons ce qu'on en peut déduire par une ſuite naturelle de raiſonnemens.

§. 4. Il ſuffit de jetter un coup d'oeil ſur la ſurface de notre globe pour ſe convaincre qu'elle conſiſte actuellement ou de couches de terre peu cohérente, mêlée de cailloux de différentes eſpeces, ou de roches, dont la hauteur & la compoſition varie infiniment; & qu'une grande partie de cette ſurface eſt couverte de l'eau des mers, des rivieres &c. L'examinant plus attentivement, on trouve, que les rochers plus ou moins élevés ſe joignent

nent à leurs pieds & forment des chaines qui parcourent pluſieurs pays ſans aucune interruption, qu'il y a d'autres pays plats entre ces chaines, où il eſt rare de trouver quelque montagne iſolée, mais dont le ſol eſt ordinairement compoſé de pluſieurs couches terreuſes, plus ou moins horizontales, portant en certains endroits de petites élévations, connues ſous le nom de collines; & enfin, que le fond de la mer ou d'autres baſſins d'eau reſſemble parfaitement à la ſurface du continent (Voyez les digreſſions relatives à ce mémoire N°. I. vers la fin). Il y a des bancs de ſable, de craie, de marne, d'argile & de cailloux ſur l'un & l'autre; les chaines de montagnes paſſent ſous l'eau d'une côte d'un bord à l'autre, & ne laiſſent que leurs pics & plateformes à decouvert, lesquels forment nos iles (*). Partout où on a fouillé la terre à quelque profondeur conſidérable, même dans les pays à couches, on a enfin rencontré quelque roche ſolide, d'ou il faut conclure que le globe eſt couvert d'une croute pierreuſe qui l'environne de toute part comme une cuiraſſe. Il ſeroit même difficile de concevoir, comment il pourroit garder ſa forme & la ſolidité néceſſaire, s'il y avoit de grands trous entre les chaines de montagnes, ſouvent fort éloignées l'une de l'autre, percés jusqu'au centre, ou à travers du globe, qui ne fuſſent remplis que d'eau, de ſable mouvant, ou d'autres terres déliées, ſurtout quand on réflechit

(*) Tous les navigateurs en fourniſſent les preuves dans les nombreux journaux de leurs voyages. Je ne citerai ici que le dernier voyage du Capitaine *Cook* Vol. I. p. 73, 74 &c. edit. originale. On peut auſſi conſulter ce que dit M. le *C. de Buffon* ſur les Iles maldives (Hiſt. nat. T. I. p. 252 & 253.) & Mr. l'Abbé *Palaſſeau* ſur l'étendue des bancs de montagnes (Eſſai ſur la Mineral. des monts pyrénées, Introd. p. XVI. & XVII.).

flechit ſur les accidents qui ſecoueroient à chaque inſtant les parties d'un tel édifice & les mettroient hors d'equilibre une fois établi.

§. 5. Pourvû qu'on faſſe la moindre attention aux phénomenes naturels qui arrivent pendant le court éſpace de la vie humaine, on aura occaſion de ſe convaincre par l'experience, que la ſurface de notre globe ſouffre des changemens continuels, plus ou moins conſidérables ſuivant la cauſe qui les produit & l'énergie avec laquelle elle agit. Ces changemens dépendent ordinairement ou de la qualité des matieres qui compoſent cette ſurface, ou de l'action de l'air & de l'eau, ou enfin du feu & d'autres matieres élaſtiques renfermées dans l'intérieur de la terre. Les dernieres ſont les plus violentes & n'échappent guere à la connoiſſance des contemporains les moins curieux, leurs effets & les ſymptomes qui les accompagnent, étant trop allarmants. Les cauſes dont les autres changemens dépendent, opérent bien plus lentement & plus doucement que le feu & les vapeurs reſerrées, mais ne discontinuant jamais de ronger & d'altérer la croute du globe, les viciſſitudes qu'elle en éprouve, ne ſont pas moins réelles & moins grandes, quoiqu'elles demandent plus de tems & deviennent par là inſenſibles à l'obſervateur dont la carriére finit trop tôt. Ainſi les plus hautes montagnes s'abaiſſent continuellement. La pluie, la neige, les vapeurs humides les pénetrent; les ruiſſeaux, les torrens les ſillonnent; l'air, la chaleur, la gelée les amolliſſent, les rongent & les fendent. Tout contribue peu à peu à leur defaite. Les parties les plus dures reſiſtent plus longtems que les tendres, à ces forces deſtructives. Voilà l'origine

rigine des inégalités, des ravins, des précipices & des roches éſcarpées dans les montagnes Les déblais des hauteurs tombent dans les vallées, les rivieres charient & roulent une quantité immenſe de ſable, de limon & de cailloux, qu'elles dépoſent ſucceſſivement ſur les païs plats & en emportent le reſte jusqu'à la mer dont elles comblent le fond. Partout il en nait des couches nouvelles, des atterriſſemens, des landes, des amas de pierres & de terres, des collines & des monticules. L'eau filtrant à travers les pores & les petites fentes des roches & des collines en détache quelques parties qu'elle entraine, transporte & depoſe ailleurs. C'eſt ainſi qu'elle creuſe des grottes qui occaſionnent enfin l'affaiſſement du terrein ſupérieur, d'une étendue ſouvent trés-conſidérable. Ces grottes ſouterraines, mais encore plus les Volcans & les tremblement de terre, creuſent, fendent & font écrouler des montagnes; les derniers ſur tout renverſent quelquefois des villes, des provinces entieres, que la mer engloutit, ou qui rentrent dans le ſein de la terre, ou bien elles reſtent couvertes de ruines, de cendres & de laves à pluſieurs repriſes. D'autres montagnes s'élevent ſubitement par l'expanſion du feu & des vapeurs élaſtiques ſouterraines. Quantité d'isles ont été produites par ces convulſions. On ſait auſſi que chaque éruption d'un Volcan change la face du païs circonvoiſin. Les inondations presque annuelles des rivieres ne changent pas moins la ſurface de la terre par tout où elles arrivent, elles devaſtent les campagnes les mieux cultivées & après l'écoulement ou l'exſiccation des eaux elles laiſſent en arriere leur limon qui y forme de nouvelles couches & durcit avec le tems. En un mot: la ſurface de la terre ſubit des changemens continuels; chaque

événement donne naiſſance à une nouvelle couche, colline ou montagne, par la deſtruction d'autres couches & d'autres roches dont il emporte les débris, ſouvent à une grande diſtance de leur lieu natal.

§. 6. Si tout cela ſe paſſe ſous nos yeux, on peut bien juger que les mêmes changemens ont dû avoir lieu dans des tems anterieurs, & que leur nombre pendant pluſieurs milliers d'années, écoulés depuis la création du monde jusqu'à nos jours, doit être trés conſiderable. Il eſt encore facile de s'imaginer que les révolutions de la Nature naiſſante ont dû être plus fréquentes, plus violentes, & produire de plus grands effets qu'elles ne font aujourd'hui, tandis que le globe n'avoit pas encore pris la conſiſtance, qui rend préſentement la diſſolution, la réaction & la translocation des matieres dont il eſt composé, plus difficile qu'elle n'étoit alors. Quelques unes de ces anciennes révolutions dont l'hiſtoire ou les traditions de presque toutes les nations ont conſervé quelque mémoire, ſont décrites de maniere qu'on ne ſauroit douter de leur énergie & de leur effet presque univerſel. Ce ſont ces ſortes de cataſtrophes primitives qui ont le plus contribué à donner peu à peu à la ſurface du globe cette forme, cet arrangement des matieres, cette diſpoſition exterieure qu'il devoit avoir pour devenir, pour la nature végétale & animale, un domicile approprié aux beſoins, à la ſureté & à la nourriture des êtres qui devoient l'orner & l'animer. Les traces qui en reſtent dans les montagnes ſont trop marquées pour qu'on puiſſe les méconnoitre & nous mettent ſouvent en état de deviner la cauſe qui les occaſionnoit. Ainſi on y trouve des preuves les plus déciſives qu'il

qu'il doit avoir été un tems, où la mer couvroit les cimes des plus hautes montagnes & par conſéquent qu'elle a abandonné ſon ancien niveau. A peine peut on faire un pas ſur le globe, dit l'auteur de l'hiſtoire des hommes (Tome 13me) ſans y voir des veſtiges de ſes conquêtes ſur l'océan. Si la mer fait quelque invaſion par ci par là et gagne du terrein ſur les côtes actuelles de quelques païs bas, c'eſt un rien vis à vis des hauteurs qu'elle baignoit autrefois, & le nombre de pareils exemples n'entre point en comparaiſon avec celui des endroits anciennement maritimes & propres à l'abordage des vaiſſeaux, endroits qui à préſent ſont à Sec & trés éloignés de la mer. Il eſt même probable que la retraite des eaux étoit fort lente. Les corps marins pétrifiés qu'on trouve par couches en pluſieurs montagnes, depuis la cime jusqu'à la racine; différentes couches ſécondaires ſur les pentes & plate formes des hautes montagnes; & les traces du paſſage des eaux, les ſillons à peu prés horizontaux ſur les flancs éſcarpés des rochers (*), en ſont autant de preuves. Au reſte, le ſentiment contraire: que les eaux ſe ſont écoulées tout d'un coup & qu'il falloit attribuer les pétrifications au deluge univerſel, ne change rien ici dans les réſultats; car il faut toujours avouër que la mer a baiſſé, laiſſant des reſtes & des traces de ſon ancien niveau ſur les hauteurs. C'eſt ſans doute une trés grande révolution arrivée à la ſurface du globe qui n'a pas manqué d'altérer conſidérablement les parties ſolides dont il eſt compoſé, & de déranger leur diſpoſition primitive, ſoit que la re-

 trai-

*) Mr. de *Sauſſure*: Voyag. aux alpes T. I. p. 156, 157, 162, 163, 164, 173 &c.

traite des eaux ait été lente ou rapide. Dans le dernier cas, le déplacement des matieres qui en réſultoit, auroit naturellement dû être plus grand à cauſe de l'impétuoſité du découlement. L'idée du déluge ſuppoſe en outre un double dérangement pareil, pendant l'inondation auſſi bien que pendant le décroiſſement de l'eau. Mais un ſeul déluge n'auroit pas ſuffi pour ranger les corps marins pétrifiés par couches, l'une ſur l'autre, de la baſe jusqu'au ſommet de pluſieurs alpes calcaires, comme on les trouve en effet; car la chûte précipitée des eaux en auroit fait tout au plus un ſeul dépot au fond; elle n'auroit pas laiſſé pluſieurs ſillons paralleles ſur les flancs, ou differentes couches ſecondaires ſur les pentes des alpes à differentes hauteurs. En un mot: il faudroit admettre pluſieurs déluges ou inondations ſucceſſives, ſi on vouloit dériver tous ces effets de ces ſortes d'événemens. Or, plus ces inondations auroient été nombreuſes, plus la ſurface de la terre en auroit dû ſouffrir, ſe défigurer & ſe changer. Mais il nous ſuffit d'avoir remarqué que la retraite la plus lente des eaux n'auroit pas manqué non plus d'altérer l'organiſation primitive de l'écorce du globe, à force de la ronger en certains endroits, d'emporter & dépoſer en d'autres les débris & le limon, pour en former de nouvelles couches.

§. 7. Le découlement de l'eau de la mer & les courans ſoumarins de l'ancien océan, ont néceſſairement dû creuſer des vallées, quand la maſſe des montagnes n'avoit pas encore pris partout la conſiſtance pierreuſe, qu'elle a aujourd'hui. Il faut au moins convenir qu'elle n'étoit pas alors partout également ferme ou dure, ne l'étant pas encore à préſent. Pluſieurs vallées ont été auſſi creu-

creuſées par les rivieres. Le Rhône ronge encore continuellement ſon lit (*). D'autres fleuves changent quelquefois leur cours en s'ouvrant un chemin à travers des couches moins dures. Quel effet n'ont ils pas dû produire, lorsqu'ils étoient plus larges & plus rapides! La plupart des rivieres hauſſent pourtant leurs lits & deviennent de jour en jour moins profondes, à cauſe du limon & des pierrailles qu'elles charient des montagnes, où elles prennent naiſſance, & des couches terreuſes qu'elles traverſent. Le fond de la mer reçoit d'elles les mêmes matieres & ſe couvre de nouvelles couches qui cauſent des atterriſſemens vers les côtes & s'augmentent des dépouilles de coraux, de coquilles & d'autres animaux & plantes marines. L'effet qui en réſulte, combiné avec celui de la degradation des montagnes dont nous avons déja parlé (§. 5.) eſt, que la plupart des profondeurs creuſées anciennement ſe comblent de débris de montagnes. de végétaux & d'animaux, & tendent peut être à arriver au niveau des éminences qui ſurplombent au deſſus d'elles, à meſure que les hauteurs diminuent, s'abaiſſent & ſe prêtent à de nouvelles excavations. Il peut arriver un jour, & peut être eſt il arrivé deja pluſieurs fois, que, comme dit un certain auteur, ce qui eſt à préſent bas-fonds ou vallée, ou plaine inférieure, devienne avec le tems ſommet de montagne, plateau ou pic ſaillant, & cela par quelque nouvelle excavation ou quelque autre deſtruction du ſol voiſin. En un mot: la ſurface de la terre n'eſt plus la même qu'elle étoit au commencement. Elle change continuellement par la translocation des matieres dont

 elle

(*) Voy. Mr. de *Sauſſure* T. I. p. 332, 333.

elle eſt compoſée, & elle a changé en tout tems depuis la création du monde jusqu'à préſent. Il y a vraiſemblablement trés-peu d'endroits ſur le globe qui ayent échappé aux ſuites de la viciſſitude générale; mais les révolutions anciennes étoient plus fortes, plus conſidérables & plus grandes qu'elles ne ſont ordinairement aujourd'hui. Chaque révolution a produit & produit encore une ou pluſieurs nouvelles couches à la ſurface du globe par le délitement des matieres apportées d'autre part & détachées de l'intérieur ou de l'extérieur de la terre. Ces couches, plus ou moins terreuſes ou pierreuſes, ſont plus ou moins épaiſſes, larges & étendues ſuivant l'eſpece, la force & la durée de la révolution qui les occaſionnoit. Conclùons de là, que *les montagnes ou roches & couches terreuſes de différents genres, dont la croute du globe eſt actuellement compoſée, différent beaucoup en date de naiſſance & en rang d'ancienneté.*

§. 8. Il-y-a longtems qu'on a reconnû en partie cette vérité & qu'on a diſtingué les montagnes en deux ou trois claſſes par rapport à leur ancienneté; mais je crois pouvoir prouver qu'il faut déja augmenter le nombre de ces claſſes, & qu'on a mêlé & confondû dans la même claſſe, des montagnes ou roches dont les époques de naiſſance ſont trés-éloignées l'une de l'autre. Je ne doute pas non plus que ces claſſes ne ſe multiplient avec le tems à meſure que nous augmenterons nos connoiſſances orologiques & qu'on parvient à obſerver l'arrangement & l'adoſſement général de pluſieurs variétés de roches & de couches, aux quelles on ne ſauroit pas encore aſſigner avec certitude la place convenable dans la Chronologie phy-

phyſique du globe. Il eſt clair, qu'*une roche inférieure, ou qui ſert de baſe & d'appui à quelque autre, adoſſée ſur elle, eſt plus ancienne que la ſupérieure* (*); mais c'eſt la difficulté d'obſerver cette ſuperpoſition en certains endroits qui embarraſſe quelques fois. Alors il ne faut pas ſe contenter d'une ſeule obſervation; au contraire il faut multiplier ces expériences partout où l'on peut, & choiſir de tels endroits où la Nature s'eſt expliquée avec plus de clarté & où rien n'empeche de découvrir la vérité. Les réſultats de pluſieurs obſervations exactes, faites en pluſieurs lieux convenables, nous tireront de l'incertitude. Nous en dirons d'avantage plus bas & tâcherons en même tems d'indiquer quelques précautions néceſſaires, à fin qu'on ne précipite pas ſes concluſions à cauſe de pareilles difficultés ou à cauſe de certaines obſervations locales, qui au premier coup d'oeil paroiſſent contraires à des vérités reconnües, mais qui ne le ſont pas en effet. Examinons à préſent la claſſification reçüe des montagnes, les ſentimens des auteurs ſur leur ancienneté relative, & voyons enſuite ce que les obſervations multipliées des Naturaliſtes les plus habiles nous obligent d'y changer.

§. 9.

(*) "Toute couche ſuperpoſée à une autre hétérogene eſt plus récente „ que l'inférieure. Il ne manque que des obſervations & il ne faut „ que quelques méditations locales ſur la ſuperpoſition réciproque „ des granits &c. &c. pour écrire l'hiſtoire ancienne du monde „ minéral, & pour que cette partie de l'hiſtoire naturelle, qu'on „ conſidere encore comme abſolument ſyſtématique ſans la connoitre, ſoit ſuſceptible d'une ſorte de demonſtration, fondée ſur „ le principe des ſuperpoſitions." Deſcription du Volcan de Boutareſſe en Auvergne par Mr. l'Abbé de Soulavie, dans le Journal de Phyſique 1783. Avril. p. 292.

§. 9. On appelle *primitives* toutes les roches des hautes montagnes qui ne contiennent point des corps marins pétrifiés, ſoient graniteuſes, gneiſſeuſes, argileuſes ou calcaires. Elles different ſenſiblement des couches pierreuſes ou terreuſes qu'on trouve dans les plaines, collines & monticules, aux pieds & aux flancs des hautes montagnes dont ces couches forment les promontoires, par la ſituation, la qualité de la pierre, la ſtratification & le défaut de corps pétrifiés. Quelques auteurs mettent auſſi dans ce nombre les Volcans les plus anciens. Il n'eſt pas improbable qu'il-y-a eu des Volcans ſoumarins immédiatement ou peu aprés la formation de la terre, peut être auſſi pendant cette grande opération même; mais il n'eſt pas décidé que le mont Ethna y appartient, comme le Comte de Buffon le prétend (Supplément à l'hiſtor. nat. Tome 5e en 4to p. 399.); car la hauteur & le volume d'un Volcan peut bien prouver qu'il n'eſt pas d'une formation récente, mais les éruptions du Volcan ſicilien dont l'hiſtoire fait mention ſont pourtant trop éloignées du commencement du monde pour le croire primitif. En outre Mr. *de Dolomieu* a obſervé que le granit &c. s'enfonce ſous le mont Ethna (V. ſes voyages aux isles de Lipari p. 132, 135.). La dénomination de montagnes primitives donnée trop généralement aux roches de toutes les hautes montagnes a déplû à d'autres phyſiciens, parcequ'il n'eſt pas prouvé qu'il y avoit des montagnes au commencement du globe, dont la ſurface étoit alors peut-être ſans inegalités. Ils y ont ſubſtitue d'autres noms. Voyant que les metaux ſe trouvent communement & en plus grande abondance dans les roches anciennes de granit, de gneiſs & de ſchiſte, que dans les roches des plaines & des

des promontoires, ils les ont nommées *montagnes à filons*. Mais outre que les plus hautes montagnes ſont ordinairement ſtériles, on découvre des filons & des mines dans les montagnes d'une naiſſance plus récente. D'autres, voyant que les roches des promontoires ſont généralement à couches, ſouvent de differentes éſpeces de pierre ou de terre, qui repoſent l'une ſur l'autre dans la même colline (Flöze, Flözgebürge), ont appellé des montagnes *ſimples* ou *uniformes* (einfache Gebürge) celles qu'on croit être les plus anciennes, parce qu'on a crû que ſurtout le granit ne ſe trouve jamais ſtratifié, mais toûjours en maſſes ſolides & par blocs. Le ſchiſte argileux d'ancienne date eſt ſans doute ſtratifié, au point que ſon tiſſu eſt ſouvent compoſé de feuillettes minces & ſes maſſes diſpoſées par couches épaiſſes. Quant au gneiſs Mr. *Charpentier* prétend, qu' examiné au moyen de la loupe, il ne montre point de feuillets paralleles, mais des parties qui s'alternent & s'interceptent ſans allignement. Quoique cela ſe trouve ſouvant ainſi, j'ai pourtant examiné bien des morceaux & blocs de gneiſs, où la ſtratification étoit trés décidée & trés manifeſte. Je peux aſſurer la même choſe par rapport au granit de pluſieurs endroits. J'en ai vû prés de Schwarzenberg (*), à Zinnwald, à Scharfenberg & en bien d'autres endroits en Saxe & en Bohéme. Le Greifenſtein prés d'Ehrenfriedersdorf en Saxe eſt compoſé de bancs horizontaux de granit, les uns ſur les autres. Quelques montagnes graniteuſes prés de Königshayn en Luſace ont

(*) Ferbers neüe Beiträge zur Mineralgeſchichte verſchied. Länder P. 1. pag. 39.

ont la même conſtruction, ſuivant l'obſervation de Mr. *de Schachmann.* (*a*) Mr. *de Sauſſure*, (*b*) Mr. *Charpentier*, (*c*) & Mr. l'Abbé *Palaſſeau*, (*) ont vérifié ce fait quant aux montagnes de la Suiſſe, de la Savoie, de la Saxe & des Pyrénées. Il y a pluſieurs années que j'ai eû occaſion d'obſerver la diſpoſition du granit gris par lits ou par bancs horizontaux, pendant le tems qu'on creuſoit le nouveau baſſin pour la réparation & conſervation des vaiſſeaux de guerre au milieu des roches granitiques à Carlscrone en Suede. Tous les environs & la plupart de montagnes granitiques à coté du chemin en allant de Carlscrone par Ekſjö à Stokholm en offrent des preuves convaincantes, & quelquefois meme des couches ou des feuillets trés minces. En d'autres roches les lits ſont très épais, ſouvent perpendiculaires (**) & difficiles à reconnoître. J'avoue qu'il y a des montagnes granitiques, dont la pâte eſt trés unie, trés ſerrée & reſſemble parfaitement à une maſſe ſolide. Il ſuffit d'y admettre une concretion rapide des parties qui ne leur laiſſoit pas le tems de s'arranger par bancs plus ou moins épais, qu'on remarque en d'autres granits, ou la concretion étoit ſucceſſive & plus lente: & on aura la clef de cette difference. Il ſe peut encore que la ſituation primordiale de ces maſſes ait été altérée en quelques endroits & que la ſtratification

---

(*a*) Voy. aux Alp. I. p. 99. — 100.

(*b*) Hiſt. min. de la ſaxe 30. 239, 737, &c.

(*c*) Beob. über die Gebürge bei Königsheim, S. 8, 9, 11.

(*) Mineralogie des pyrénées p. 155.

(**) Voyage aux alpes par Mr. de Sauſſure T. I. p. 180, 182, 184, 185, 230, 400, 401, 502, 503, 532, 537.

cation en eſt devenue moins réguliére & moins diſtincte; ou que la criſtalliſation confuſe, qui vraiſemblablement a formé les granits & pluſieurs autres roches, ait quelquefois donné aux feuillets ou bancs pyramidaux & paralleles, dont on les trouve ſouvent composées, une ſituation verticale, concentrique, courbée en arcs, ou de quelque autre forme irreguliere, contractée dès le commencement; mais les voyant ſouvent diviſées en bancs, plus on moins épais & réguliers, il faut avoüer, qu'un dépôt de parties a alors accompagné leur criſtalliſation. Le premier fond étant une fois oblique par telle raiſon que ce ſoit, les dépoſitions ſucceſſives ont dû ſuivre la même inclination, parceque les fluides obeiſſent toujours à l'obliquité du ſol. Or, ſi ces criſtalliſations & dépoſitions ſe ſuccédoient de prés, il eſt aiſé à concevoir, que les interſtices n'ont pas pù reſter égaloment diſtinguibles par tout, mais qu'au contraire les grains ſe devoient ſerrer les uns contre les autres au point d'effacer toute marque de depoſition ſucceſſive. L'évaporation de l'humidité, le poids & la compreſſion occaſionnée par les maſſes ſuperpoſees, l'homogénéité, l'attraction & la cohéſion des parties qui ſe touchent, ont naturellement dû conſolider & reunir les interſtices de bancs en pluſieurs endroits, lorsque le granit ſe durcit.

Il ſuffit qu'il y ait réellement des granits anciens diſtribués par lits trés-diſtincts en d'autres endroits. Je ne rapporterai pas comme une preuve de cette ſtratification la facilite de fendre le granit le plus dur en blocs tres grands & trés réguliers par le moyen de coins appliqués horizontalement, qu'on y enfonce à coups de mar-

teau (*); car on ſait à préſent fendre le granit *en tout ſens*, même transverſalement, on le taille auſſi bien que la molaſſe. Les gros blocs quarrés ou parralleiepipedes de granit qu'on nous apporte de Finlande & qu'on travaille ici à St. Pétersbourg avec tant de facilité qu'à Breſte & à Carlscrone, en ſont garans. Les pierres à four dont on ſe ſert pour la fonte du fer (Saxum fornacum) ſont tirées tantôt des carrieres de gneiſs, tantôt de celles de granit dans les lieux où celui ci ſe trouve parfaitement ſtratifié à feillettes pour ainſi dire. Mr. *Pini* connù par pluſieurs mémoires intereſſants nie abſolument la ſtratification des granits, ne l'ayant pas trouvée dans les montagnes appartenantes au St. Gottard, à une étendue de 60 liëues (Memoria mineral. ſulla montagna di St. Gottardo p. 104). Je ne lui oppoſerai que les obſervations de Mr. *de Sauſſure*, & un fait, dont tout obſervateur qui a occaſion de viſiter la Suiſſe peut ſe convaincre. Il y a en pluſieurs villes p. ex. à Berne des marchands de gros blocs des criſtaux de roche, tirés du St. Gottard & d'autres montagnes de ce païs. Ils les vendent aux étrangers, amateurs de curioſités naturelles. L'hôte au faucon, auberge de cette ville, en avoit, quand j'y paſſois (1769) un magazin aſſés garni. Examinés attentivement ces criſtaux d'un volume ſouvent prodigieux, quand on a eu ſoin d'y laiſſer attaché quelque bloc du granit, ſur lequel ils ſe ſont formés, & dites moi, ſi ces granits ſont ſtratifiés ou non? pour ne point parler ici des lits & des bancs, par lesquels ils ſont diſpoſés dans ces carrieres, & qui ſont trop

(*) Voy. la Critique anonyme de la Géogenie de Mr. Silberſchlag T. I. pag. 184.

trop épais & trop lourds pour en transporter un ſeul en entier. Au reſte il n'eſt pas étonnant que Mr. *Pini* ne ſoit pas de cet avis, quand on lit. (p. 99 et 100.) tout ce qu'il prétend pour affirmer la ſtratification des granits, prenant les couches calcaires pour modéle, comme il s'explique encore dans un autre mémoire ſur la maniere d'obſerver la diſpoſition des couches (dei ſtrati) dans les montagnes. Si chacun eſt le maître de donner telle étendûe qu'il voudra aux termes dont il ſe ſert, & de déterminer à ſon gré les cas, où il veut les employer ou non, il faut convenir qu'il n'y a pas beaucoup de granit ſtratifié parfaitement dans le ſens & ſelon la definition de Mr. *Pini*. Mais la Nature ſe ſouçiant fort peu de nos termes & de nos définitions, n'a pas trouvé à propos de ſtratifier le granit par tout de la même maniere & avec la même précision, épaiſſeur & diſtinction, que l'on obſerve dans la diſpoſition des roches calcaires. Cela n'empeche pas que l'une & l'autre pierres ne puiſſent réellement être ſtratifiées, quoique plus ou moins, plus ou moins clairement, ce qui ne change rien dans l'aſſertion, excepté la facilité plus grande ou plus petite de l'obſerver. Tel pourroit dire, qu'il ne regarderoit aucune pierre comme ſtratifiée, à moins qu'elle ne fut compoſée de feuilles minces ſemblables à celles de l'ardoiſe ou du verre de moscovie; mais la ſignification & l'uſage de cette épithete n'oblige pas de lui donner un ſens ſi borné. Convenons donc que le granit ſe trouve diſpoſé par lits ou ſtratifié, comme je l'ai prouvé par pluſieurs obſervations. Cela étant, on voit bien que la diuiſion des montagnes en ſimples ou uniformes & montagnes à couches, n'eſt rien moins que naturelle, & qu'elle n'empeche pas d'admettre une origine

aqueuſe ou océanique pour le granit auſſi bien que pour bien d'autres roches. Mr. *Pini* dans ſon mémoire cité ci deſſus (*) & pluſieurs autres auteurs ont propoſé une autre dénomination & diviſion des montagnes qui reellement eſt préferable à la précédente. Il appelle montagnes *originaires* Urgebürge les plus anciennes, dont la deſtruction a fourni les matieres qui compoſent actuellement les montagnes *dérivatives*, formées de leurs débris. Mais il eſt certain que les montagnes originaires ne ſont pas toutes de la même ancienneté. Il n'y a que les granitiques qui meritent ce nom, comme nous verrons plûs bas, nous bornant à celles, que nous pouvons connoitre; car il faut bien que le granit ait ſon noyeau, autour duquel il ſe formoit, s'il ne continue pas jusqu'au centre de *la terre*, *choſe que nous ignorons* abſolument.

§. 10. Les montagnes dérivatives de Mr. *Pini*, ou ſi on trouve ce nom trop général à cauſe des roches calcaires, les montagnes *ſecondaires* & *tertiaires*, toujours à couches, *forment la ſeconde & troiſieme claſſe des auteurs.* Ignorant combien de révolutions notre globe a eſſuyées, mais aſſuré de ce que j'ai déja dit, que leur nombre a été trés conſidérable & que chaque revolution a donné naiſſance à une nouvelle couche de la terre, plus ou moins univerſelle ou particuliere, je juge néceſſaire d'augmenter le nombre de ces claſſes. Toute pierre ſablonneuſe ou calcaire p. ex. n'eſt ſurement pas de la même ancienneté. A meſure que les obſervations ſe multiplieront & que le nombre de celles qui ſont dignes de ſoi nous metront en état

(*) Della maniera d'oſſervare nei monti la diſpoſizione degli ſtrati.

état de généraliſer quelques idées, on connoitra mieux les différents rapports entre les variétés de ces montagnes, & on ſera probablement obligé d'en établir une quatrieme, ſixieme claſſe &c.

§. 11. Quand on examine les hautes montagnes, on remarque d'abord que les matieres qui compoſent leurs rochers, ſont d'une nature trés-différente; que ces roches, loin d'y être jettées au hazard, ſe trouvent adoſſées l'une ſur l'autre dans un certain ordre vniforme dans toutes les grandes chaines du monde connû ou viſité par quelque Phyſicien minéralogiſte. Quittant le païs plat dont le terreau eſt compoſé d'argile, de limon, de ſable, de cailloux, de marne & de craie, plus ou moins endurcies, on commence à monter ſur des roches calcaires remplies ordinairement de pétrifications. Continuant la route toujours en montant, on trouve encore des roches calcaires, ou tout à fait deſtituées de pétrifications, à ce qu'on prétend, ou qui n'en contiennent que fort peu. On arrive enſuite à des montagnes d'une hauteur moyenne, compoſées de ſchiſte, de roche, qu'on appelle mal à propos roche cornée (*), de gneiſs & d'autres pierres micacées, qui toutes contiennent beaucoup de terre argileuſe. Ces roches

(*) Mr. le C. de Buffon fait la même remarque (Hiſt. nat. des minéraux en petit 8. T. I. p. III. &c. dans la note). Mais jusqu'à préſent il n'y a pas d'autre nom pour cette eſpece de roche. Celuici eſt adopté par tout en Suede & en Allemagne, non ſeulement des mineurs, mais auſſi des minéralogiſtes. Mr. le Comte auroit donc pû ſavoir que je n'en ſuis pas l'inventeur. La pierre de corne des allemands (Silex pyromachus) eſt ſans doute un ſilex d'une compoſition differente de celle que Mr. le C. de Buffon lui attribue.

roches argileuſes regnent au moins dans cette région, comme le granit dans celle qui ſuit, qui eſt la plus haute & forme le dos de la chaine; car dans l'une & l'autre region il y a des roches ſecondaires qui repoſent par ci par là ſur les argileuſes & graniteuſes, ſi j'en excepte les plus hautes, ordinairement à nud & ſans couverture. Veut-on deſcendre de l'autre coté de la chaine pour la traverſer, on trouve les mêmes bandes, la même ſuite & diſpoſition des maſſes pierreuſes, ſur lesquelles on paſſe pour ſe rendre à la plaine du côté oppoſé, avec cette ſeule différence, que c'eſt dans un ordre inverſe de celui qu'on obſervoit en montant.

A ce fait il faut ajouter une obſervation pas moins générale, quoique plus difficile à faire. Partout où on a pû pénétrer dans l'intérieur des montagnes calcaires & argileuſes, gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes à une profondeur ſuffiſante, ſoit dans les mines, ſoit dans les rauins & vallées, où ces montagnes avoiſinent les roches graniteuſes, on a découvert, que le granit ſert de baſe à toutes ces montagnes, & que le ſchiſte, le gneiſs &c. repoſe ſur lui, ſervant à ſon tour de baſe aux roches calcaires, même de cette éſpece qui appartient aux alpes & ne contient que rarement des corps pétrifiés. Il arrive quelquefois que la roche calcaire repoſe immediatement ſur le granit, ou il n'eſt pas couvert de Gneiſs ou de Schiſte. Mais toûjours le granit forme la roche la plus profonde que nous connoiſſions jusqu'à préſent, & en même tems il forme auſſi les plus hautes régions des montagnes.

Cet

Cet ordre conſtant prouve aſſés, qu'il faut admettre pluſieurs époques de naiſſance pour les hautes montagnes auſſi bien que pour les differentes couches des montagnes ſecondaires ou tertiaires. On a beau dire que les trois bancs des hautes montagnes pourroient avoir été formés en meme tems. Pourvû qu'on réflechiſſe un peu comment la nature procéde encore de nos jours, quand elle forme ces couches nouvelles qui naiſſent à chaque inſtant devant nos yeux, à l'aide de ſes deux agents univerſels, l'eau & le feu; on verra bientot qu'il auroit été tout à fait impoſſible, que les bancs quartſeux ou graniteux, argileux & calcaires euſſent pû ſe ranger partout dans le même ordre de ſuperpoſition, ou nous les trouvons actuellement, ſi les terres ſimples qui entrent dans leur compoſition, avoient été toutes à la fois mêlées enſemble dans la quantité néceſſaire pour former ces bandes, & tenues en ſolution ou mêlange fluide, ſoit par l'eau pure ou melée de quelque acide, ou par le feu, ou par tous les deux à la fois. Car ces terres fondues enſemble par le feu, ou combinées dans l'eau de telle façon qu'on voudra, ſe criſtalliſant & tombant au fond, auroient néceſſairement dû ou ſe mêler confuſement ou auſſi ſe précipiter ſéparement (ſi elles en avoient eû le tems & le repos néceſſaire) ſur le même fond ſuivant leur gravité ſpécifique; mais ni l'un ni l'autre n'eſt arrivé. Nous les trouvons au contraire toutes combinées dans le granit d'une maniere uniforme par tout. Ses parties intégrantes, le quarts, le feltſpat & le mica gardent chacune toùjours la même proportion de terres qui entrent dans leur compoſition. Dans le ſchiſte la terre argileuſe domine, mais elle n'eſt pas depourvue de tout mêlange de terre ſiliceuſe &c., non plus que la roche cal-

calcaire, qui contient ſouvent de la terre argileuſe, magnéſienne &c. en certains endroits. Il faut donc convenir, que les différentes bandes des hautes montagnes ne ſont pas d'une formation ſimultanée (*), mais ſucceſſive, ſuivant l'ordre de leur adoſſement, & qu'il y en a par conſéquent de plus récentes & de plus anciennes. Au reſte il eſt impoſſible de fixer la durée de chaque période ou intervalle entre la formation de l'une & l'autre bande. Auſſi ne s'agit-il pas dans ce mémoire de l'ancienneté abſolue, mais uniquement de l'ancienneté relative des roches & couches du globe. Il y a pourtant toute apparence que les révolutions de la nature, capables de produire des bandes d'une ſi grande épaiſſeur & étendüe qu'en ont le granit, le ſchiſte & la pierre à chaux des hautes montagnes, ne doivent pas s'être ſuccedées de prés, mais qu'il doit y avoir eû entre elles des intervalles bien conſidérables.

§. 12. Que la conſtruction des hautes montagnes & la diſtribution de leurs roches eſt réellement telle que je l'ai expoſée dans le § précedent, c'eſt un fait auéré aujourd'hui de tous les voyageurs dignes de foi, qui ont viſité quelque chaine de montagnes, en quels pays que ce ſoit. Il ſeroit trop long & ne ſerviroit à rien de copier ici les paſſages des auteurs, qui prouvent cette harmonie de leurs obſervations. Leurs ouvrages étant imprimés & ſous les yeux du public, quiconque veut ſe familiariſer un peu avec la littérature moderne de la géographie phyſique, eſt à portée de s'en convaincre. En matiere

(*) On peut conſulter ce qu'en dit Mr. l'Abbé *Palaſſeau* dans ſa Minéralogie des Pyrenées p. 154, 155.

matiere d'experience la pluralité des voix données par des temoins oculaires, dont l'intelligence, l'exactitude & l'intégrité n'eſt pas équivoque, doit ſans doute décider des faits qu'on cherche à connoitre. Il n'y a pas d'autre moyen d'en avoir quelque ſureté. Chacun qui examine lui-même les montagnes, trouvera ſes propres obſervations ou conformes ou contraires à ce que la pluralité prononce. Dans le premier cas ſa voix ſe joint au nombre des voix affirmatives; dans le ſecond cas il eſt plus raiſonnable de croire qu'un ſeul homme a pû ſe tromper que d'en accuſer pluſieurs, dont le diſcernement eſt connû. Appliquant ces regles équitables à l'objet dont il s'agit ici, on conviendra que l'arrangement des montagnes expoſé ci deſſus ne ſouffre plus de doute, étant avoué de la plus grande partie de nos meilleurs obſervateurs. On a donc tort de confondre ces obſervations avec des ſyſtemes chimériques & de qualifier d'hypotheſes les conſéquences qui ont avec elles une liaiſon néceſſaire, qualification qui ne convient jamais aux faits, à l'expérience & aux réſultats qui en dérivent par un raiſonnement juſte, mais bien aux théories imaginées dans le cabinet, & ſouvent ſans conſulter la Nature.

§. 13. Pour ne paſſer ſous ſilence rien qui pourroit affoiblir ce qui eſt dit de l'accord des obſervations touchant l'arrangement général des montagnes, il eſt bon de prévenir une objection qu'on ne manqueroit pas de faire, ſi je n'y répondois pas d'avance. Parmi ceux, dira-t-on qui avouent que le granit occupe les cimes; le gneiſs ou le ſchiſte la région moyenne; la pierre à chaux la zone inférieure des grandes chaines de montagnes; & que le

granit s'y plonge ordinairement ſous les autres roches, comme le gneiſs ou ſchiſte ſert de baſe à la roche calcaire, il y a pourtant beaucoup des ſchismes ſur l'ancienneté relative du granit, du gneiſs, du ſchiſte & de la pierre à chaux. On prétend avoir trouvé du gneiſs ſous le granit ou dans ſon interieur, & du ſchiſte ſous des roches calcaires: en un mot, d'avoir remarqué quantité d'exceptions de l'ordre général que j'ai indiqué, les quelles ſemblent démontrer que le granit, le gneiſs, le ſchiſte & la roche calcaire ne diffèrent pas en date d'ancienneté & ſont diſpoſés l'un ſur l'autre ſans aucune régularité conſtante. Je ſuis bien éloigné de vouloir diſputer des faits ou mépriſer les obſervations d'autres phyſiciens même dans le cas, quand je n'euſſe rien vû de ſemblable pendant le tems que j'ai employé à viſiter les principales montagnes & mines de l'Europe, mais je nie abſolument les conſéquences qu'on en a voulû tirer, & je compte de prouver dans la ſuite de ce memoire que de pareilles anomalies locales & toutes les difficultés propoſées jusqu'a préſent n'otent rien à la vérité de l'ordre général des montagnes, expoſé ci deſſus & avoué de la plûpart des obſervateurs ſans préjugés. Il eſt vrai que pluſieurs obſervations qu'on vient d'offrir au public de certains endroits, où l'étude des montagnes & des ſciences y appartenantes eſt encore dans le berceau, ne méritent pas la même attention. Chacun a ſa maniere particuliere de voir, & ne ſaiſit pas toûjours le juſte point de vûe qu'il faut choiſir pour pénétrer les ſecrets de la nature. Mais ſans m'y arrêter, je trouve avec feu Mr. Bergman que la plûpart des diſputes phyſiques roulent plutôt ſur l'explication des phénomenes que ſur les phénomenes mêmes. Il ſuffit d'avoir remarqué quelque

quelque choſe, qu'on ne ſait pas concilier avec les vérités deja connues & peut être cent fois prouvées, on ne balance guere de les rejetter toutes & de former de nouvelles théories, contraires aux premieres. Voilà ce qui retarde les progres des ſciences phyſiques, & nous jette ſouvent dans l'incertitude & l'inconſéquence la plus ſinguliere. Tâchons donc de voir, ſi les anomalies obſervées en quelques endroits nous obligent de changer nos idees ſur la conſtruction générale de la croute du globe & d'abondonner les réſultats qu'une infinité de recherches exactes ont portés jusqu'à l'évidence; ou s'il y a moyen de raſſurer les ſceptiques trop facilement ébranlés, en leur montrant que les anomalies qui les embarraſſent, & les contradictions qu'ils croient inévitables, ne ſont telles qu'en apparence.

DE
ORDINE FIBRARVM CORDIS.
Diſſertatio IV.
DE
FIBRIS EXTERNIS VENTRICVLI SINISTRI.

Auctore
C. F. WOLFF.

Diſpoſitio fibrarum.

Vti ſic fibrae ventriculi dextri externae diſpoſitae erant, vt faſcias coniunctae latas et tenues faſciolasque efficerent minores, externam ventriculi ſuperficiem obducentes; longos, quaſi teretes, funes, ſiue faſciculos, in quos fibrae collectae eſſent, in ſiniſtro inueniri ventriculo (*a*), monitum eſt, craſſiores ad baſin (*b*), et ramificatos (*c*), ſuper faciem ventriculi gibboſam diſperſos, verſus apicem tenuiores, ſibique mutuo contiguos, (*d*) aut fibras tandem teretes, ſimplices, aequali inter ſe ductu progredientes (*e*). Hi funes et fibrae in diverſis ventriculi regioni-

(*a*) Tab. I. 72.
(*b*) Tab. I. 64. 67. 70. 81.
(*c*) Tab. I. 70. 71. 72. 73.
(*d*) Tab. I. B. 78. 86.
(*e*) Tab. I. 92. 93. 94. 95.

gionibus inſigniter differunt, aliamque in aliis prae ſe faciem ferunt. Imprimis in ſuperiori ſuperficie poſterior pars gibboſa ad baſin, (*a*) dexterior ad crenam, (*b*) ſiniſterior ad marginem obtuſum (*c*), et quae apicem circumdat regio, (*d*) ſingulari fibrarum diſpoſitione ſe inſigniunt; et propriam quoque inferior ventriculi ſuperficies fibrarum ſpeciem habet.

Funes craſſi ramificati in parte gibboſa ad baſin.
(*Tab.* I. 59. 81. 86.)

Funibus praecipue gibboſa pars ventriculi craſſis longisque et teretibus inſtructa eſt, ortis a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, (*e*) arcuatim inde ſuper omnem gibboſam hanc partem et radiatim quodammodo diſperſis. Accumbunt ſibi mutuo proxime ad filum (*f*), progrediendo magis magisque a ſe invicem diſcedunt, ſimulque in minores paulatim dividuntur funiculos, tanquam trunci in ramos. (*g*) Interſtitia, quibus funes maiores, minoresque funiculi, diſtincti ſunt, adipe primum et celluloſa, deinde profundius fibrillis (*h*), repleta ſunt, quibus funes funiculique inter ſe connectuntur. Sic totam hi funes gibboſam partem ventriculi in ſuperiori ſuperficie occupant, a baſi oblique

(*a*) Tab. I. 81. 59. 86.
(*b*) Tab. I. 87. 88. 89. 90. 94. 95.
(*c*) Tab. I. B. 85. 91.
(*d*) Tab. I. 91. 94. 95. 97. 98. 99. 100. E.
(*e*) Tab. I. w.
(*f*) Tab. I. 59. 60. 61. 62. 64. 67. 70. 81.
(*g*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*h*) Tab. I. 65. 68.

oblique ſiniſtrorſum ad mediam partem marginis vsque ſiniſtri deſcendendo (*a*).

Planae fibrae et confluentes anterius dexteriusque ad crenam.
(*Tab. I.* 87. 88. 89. 90. 94. 95. 97. 99.)

Alia facies anterius dexteriusque iuxta crenam, et inde porro ad dimidiam anteriorem partem marginis ſiniſtri vsque, in ſuperiori ventriculi ſuperficie apparet. Non funes craſſi teretes, ſed fibrae planae, (*b*) non diſcedentes aliae ab aliis et ramificatae, ſed ſibi mutuo contiguae potius (*c*), inordinataque coalitione inter ſe confluentes, (*d*) hanc ſuperficiei ſuperioris partem iuxta crenam occupant. Laminas fere vel faſcias dixeris, ſimiles quodammodo faſciis ventriculi dextri, niſi magis confuſae inter ſe minusque in faſciolas diſtinctae, vnam potius continuam, a crena ſubortam, laminam efficerent, ad aliquam a margine diſtantiam vsque continuatam. Sola illa faſciola, (*e*) quam fibrae ventriculi dextri ad partem crenae poſteriorem, in ſiniſtrum tranſeundo ventriculum, efficiunt, quae pontis inſtar arteriam coronariam tegit, diſtincta eſt. Quae inde antrorſum porro a crena oriuntur fibrae reliquae omnes, inter ſe confluendo, ſimilique progrediendo ductu, continuam potius in hac iuxta crenam parte faciem efficiunt.

Siniſte-

(*a*) Tab. I. 59. 81. 86.
(*b*) Tab. I. 84. 87. 89. 90.
(*c*) Tab. I. 94. 95.
(*d*) Tab. I. 94. 95.
(*e*) Tab. I. 87. 88.

Siniſterius ad marginem funiculi teretes.
(*Tab. I.* 59. 79. 91. E.)

His fibris planis confluentibus anterior ergo dexteriorque, apici et crenae propior, pars ſuperficiei ſuperioris ventriculi occupatur. Prope marginem vero craſſiores fibrae, aliaeque prae aliis eminentes, teretes, interſtitiis profundioribus diſtinctae, (*a*) ex planis illis prodeunt, ſuperque marginem deſcendunt. Hae quidem, quo ſunt baſi propiores, eo craſſiores exiſtunt, verſus apicem magis magisque tenues redduntur; vt, ſi marginem reſpicias totum ſiniſtrum, funes primo craſſi ad baſin (*b*) deinde funiculi ſenſim minores, (*c*) poſtremo verſus apicem fibrae tandem ſequantur teretes atque diſtinctae (*d*).

Radiata fibrarum diſpoſitio ad apicem.
(*Tab. I.* 85. 97. 98. 99. 100. 103. 104.)

Denique ad apicem quoque et in regione. quae eum circumdat, peculiaris, in hac ſuperiori (*e*) non minus quam inferiori (*f*) ventriculi ſuperficie, et diverſa a caeteris hactenus deſcriptis regionibus, diſpoſitio fibrarum inuenitur. Fibrae ipſae ſimiles ſunt fibris marginalibus, teretes ſcilicet, diſtinctae, aliaeque prae aliis eminentes; decurſu inſigniter

(*a*) Tab. I. 85. 86.
(*b*) Tab. I. 59. 69.
(*c*) Tab. I. 69. 79.
(*d*) Tab. I. 79. 91. E.
(*e*) Tab. I. 95. 99. 98. 104.
(*f*) Tab. III. 30. 35. 41. 31. 36. 42. 47.

ter differunt. A *Lowero* haec iam diſpoſitio fibrarum, haud ſatis accurate tamen, notata et picta exſtat. A *Senaco* eadem deſcripta traditur. Stellam hic Vir Illuſtris vocat, in ipſo ventriculi apice, in interna eius non minus quam externa ſuperficie apparentem, radiis inſignem curvatis. Huiusque deſcriptionis ſimilem figuram *Lowerus* reddiderat. Singularis omnino et notabilis figura eſt, quam fibrae ſua diſpoſitione et decurſu in hac ſede efficiunt. Non integram tamen vnam et perfectam ſtellam deſcribunt, ex cuius ſcilicet centro vnico circumquaque radii curuati in omnes plagas exirent. Sunt duae potius partes duarum diuerſarum ſtellarum, quarum altera in ſuperiori (*a*), altera in inferiori, (*b*) ſuperficie radiis ſuis apparet, quaelibet proprio ſuo ad marginem collocato centro, ſeu foco, gaudet, neutra ex hoc centro ſuo radios ad alteram ſuperficiem mittit. Superior in puncto marginis ſiniſtri, pollicem fere a fine crenae remoto, focum, (*c*) radios in ſolam inde ſuperiorem ſuperſiciem verſus crenam, eiusque diuerſas partes, a media circiter crena ad extremum eius finem vsque, diſperſos (*d*) habet. Inferior foco (*e*) inſtructa ad finem ſtriae poſito, interſtitiumque occupante, quod inter hunc finem et focum ſuperiorem intercedit, radios in inferiori ſuperficie verſus marginem oblique et baſin emittit. (*f*) Non ergo in partem, oppoſitam directioni ſuperiorum radiorum, inferior pars ſtellae ſuos radios diſtribuit,

(*a*) Tab. I. 95. 99. 101. 102. 104.
(*b*) Tab. III. 30. 35. 41. 47.
(*c*) Tab. I. E.
(*d*) Tab. I. 89. 89. 94. 97. 99. 102. 104.
(*e*) Tab. III. C.
(*f*) Tab. III. 26. 27. 28. 39. 45. 48. 51. 52.

tribuit, vt fieri oporteret, ſi ſtellae eiusdem vtrique radii eſſent; ſed eodem cum ſuperioribus ductu potius et inferiores progrediuntur radii, ad marginem oblique ex foco ſuo in inferiori, deinde ad crenam oblique, ad partem eius poſtremam, in ſuperiori ſuperficie (*a*) adſcendendo. *Radiatas* ergo potius *fibras* dixeris eſſe, quae in ſuperiori ſuperficie regionem circa apicem occupant, radiis arcuatim ductis; *radiatasque* pariter, quae in inferiori hanc regionem obducunt, vtrasque tamen diverſas, proprio quasvis foco ſuo inſtructas.

Longae ſubteretes faſciatae fibrae in inferiori ventriculi ſuperficie (*Tab. III.* 23. 24. 25. 28. 29. 30.)

Inferior ſuperficies tota ſimilibus fere fibris ſubteretibus, longis continuatisque, (*b*) a ſe mutuo frequenter diſcedentibus, (*c*) interſtitiisque oblongis in faſcias haud obſcure diſtinctis, inſtructa eſt. Craſſiores tamen teretioresque, magisque eminentes, ad baſin apparent (*d*), qua parte a filo oriuntur cartilagineo poſteriori ſiniſtro; planae magis, minusque diſtinctae, ex margine emergentes (*e*) ſiniſtro, in planam hanc ſuperficiem prodeunt, partemque eius notabilem tegunt. Ad ſtriam vbi accedunt, diſtinctiores denuo teretioresque, interſtiis imprimis ſe inſigniunt oblongis, quae pulcherrimis maxime repleta ſunt fibrillis

 necten-

(*a*) Tab. I. 85. 86. 88. 84. 87.

(*b*) Tab. III. 23. 24. 25.

(*c*) Tab. III. 20. 20. 21.

(*d*) Tab. III. 8. 10. 14.

(*e*) Tab. III. 27. 28. 39. 40.

nectentibus (*a*). Radiatae denique, quarum ſuperius mentio facta, apicis regionem fibrae occupant (*b*). Hae, ſicut in aliis maxime cordibus vidi, ſatis manifeſto in faſcias diſpoſitae ſunt, interſtitiis longis diſtinctas, radiatim verſus apicem concurrentes. Eaedemque, vti ad marginem vsque faſciae et ad baſin vsque diſtinctae adſcendunt, maximam ſane partem ſuperficiei inferioris occupant. Minus tamen diverſa directione fibrarum hae faſciae, velut in ventriculo dextro, quam potius longis continuatisque interſtitiis diſtinctae ſunt, adipe exterius et celluloſa, interius fibrillis nectentibus, repletis. Hae foco, ad finem ſtriae in vltima parte marginis (*c*) poſito, gaudent (*d*); ex quo fibrae longae, parum curvatae, faſciatim prodeunt, magnamque ſuperficiei inferioris partem, oblique ad marginem et ad baſin vsque procurrendo, occupant.

Nexus fibrarum per extremitates.

Dum extremitatibus ſuis faſciculi fibrarum ventriculi ſiniſtri inter ſe connectuntur, hoc duplici ratione efficitur. Rami alibi, in quos maximi funes frequenter dividuntur, ab aliis truncis ſuborti ad alios ſe applicant, truncosque connectunt, vel confluunt cum ramis aliorum truncorum, et retis aliquam ſpeciem efficiunt, haud prorſus abſimilem iis retiformibus faſciculorum productionibus, quibus intus ventriculorum parietes obducti ſunt. Alibi fibrae, quae contiguae hactenus, ductuque ſimili, erant pro-

(*a*) Tab. III. 19. 20, 21.
(*b*) Tab. III. 30. 35. 41.
(*c*) Tab. III. 47. 47. C.
(*d*) Tab. III. 50. 48. 46.

progreſſae, a ſe inuicem ſecedunt, et vel cum aliis ſe coniungunt vicinis fibris, vel inter ſe ipſas denuo confluunt, interſtitia oblonga finibus acutis formando. Vtriusque nexus exempla copioſa exſtant. Prior modus in parte gibboſa maxime inter funes inuenitur ramificatos, quorum rami vel ad vicinos truncos ſe applicant, truncosque connectunt (*a*), vel cum ramis aliorum truncorum confluunt, (*b*), et ſpeciem aliquam retiformis nexus efficiunt. Poſterior in ſuperiori ſuperficie ventriculi iuxta crenam (*c*), copioſior tamen in vniuerſa inferiori ſuperficie occurrit, vbi variis modis fibrae aliae ab aliis ſecedunt, ad alias ſe applicant, egregiaque fibrillis ornata interſtitia formant. (*d*).

Qui ſimplicior in ſiniſtro quam in dextro ventriculo.

Qui caeteri nexus modi per extremitates faſciarum in dextro ventriculo obſeruati ſunt, vbi pennatim aliae faſciolae extremitatibus ſuis cum aliis, vel ſerratim, vel interrupta continuatione connectebantur, hi vix locum habere videntur in fibris externis ventriculi ſiniſtri, quae rarius ſcilicet in faſcias collectae, faſciculos potius aut fibras efficiendo teretes, latioribus huiusmodi, quae ad illos nexus requiruntur, extremitatibus minime ſunt donatae. Ad illum ergo faſciarum ventriculi dextri nexum ſolum hic faſciculorum ſiniſtri ventriculi nexus referendus eſt, quo faſciae aliae extremitatibus ſuis oblique in alias inſerebantur.

Ee 3 Per

(*a*) Tab. I. 70. 72. 83.
(*b*) Tab. I. 71. 75. 76.
(*c*) Tab. I. 94. 92. 93. 84. in pluribusque ſedibus non notatis.
(*d*) Tab. III. 15. 18. 18. 20. 20. 21. &c.

Per latera fibrarum nexus. Coalitione inordinata.

Lateribus ſuis fibrae ſingulae faſciculorum ventriculi ſiniſtri duplici ratione inter ſe connectuntur. Vel coalitione ſcilicet inordinata id efficitur vel ope fibrillarum nectentium. Illud maxime in ſuperiori ſuperficie ad crenam locum habet, vbi fibrae planae iuxta ſe mutuo incedentes, frequenter coaleſcunt, vnamque latiorem efficiunt fibram, mox porro ſecedendo in duas diuiſae fibras iterumque in vnam confluentes (*a*). Deinde in inferiori etiam ſuperficie eadem paſſim ratio nexus inter fibras inuenitur, quae haud raro, dum ductu ſimili progrediuntur, confluunt, vt difficilius fibra altera ab altera diſtinguatur (*b*).

Fibrillis nectentibus.

Longe frequentiſſimus tamen, quo faſciculi fibraeque ventriculi ſiniſtri complicantur, nexus fibrillis efficitur, ab altera fibra in alteram, a faſciculo altero, aut fune, in alterum tranſeuntibus. Neque vsquam inter fibras aut faſciculos, qui diſtincti iuxta ſe inuicem incedunt, fibrillae deficere videntur; modo vt breuiſſimae in ſedibus iis, vbi arctius faſciculi aut fibrae compreſſae progrediuntur, obſervatu ſint difficiles. Huc maxime fibrae radiatae pertinent apicis in ſuperiori ſuperficie ventriculi, quarum aliae, eminentes interſtitiis notabilibus, a ſe invicem diſtinctae ſunt, aliae profundius ſerpentes, illarum interſtitia replent, et quae vtraeque breuiſſimis vix viſibilibus fibrillis arctiſſime inter ſe ſunt connexae (*c*). Vti in nullis vero

---

(*a*) Tab. I. 89. 90.
(*b*) Tab. III. 28. 29. 30.
(*c*) Tab. I. 98. 100. 103.

vero aliis ſedibus craſſi aeque longique ac in gibboſa parte ventriculi, et qui tam largis a ſe inuicem diſtincti ſint interſtitiis, funes inueniuntur; nusquam tam longae quoque fortesque et manifeſtae, quam in hac parte, fibrillae apparent. Duabus lineis iſtae, dum funes dilatantur, longiores ſaepe inueniuntur (*a*). Alibi adeo craſſae ſunt, vt ſpeciem fibrarum prae ſe ferant (*b*). Superficiales, quae ex alterius faſciculi fibrillis in alterum manifeſto continuarent faſciculum, quales in ventriculo dextro inueniuntur, (*c*) nusquam in ſiniſtro ventriculo reperi. Profundiores vbique inter fibras latent, iisque dilatatis apparent, fundum quaſi longorum interſtiorum efficiendo, interſtitiis ipſis ad ſuperficiem vsque celluloſa et adipe repletis. Egregiae non minus fibrillae inter fibras inueniuntur teretes et longas in ſuperficie ventriculi inferiori. Imprimis ad ſtriam frequentius fibrae a ſe mutuo diſcedunt, interſtitiaque efficiunt oblonga, finibus acutis terminata. (*d*) Haec plena ſunt fibrillis, ſolito modo oblique ab altera fibra ad alteram tranſeuntibus. Denique ad apicem in hac inferiori ſuperficie inter fibras radiatas manifeſtae eiusmodi fibrillae et longae in conſpectum veniunt. Rariores in hac ſede fibrae ex ſuo foco diſperguntur, interſtitiisque diſtinguuntur largis longisque, quae tota fibrillis repleta ſunt, ſingulari ſpecie ſe diſtinguentibus (*e*). Minus profundae ſolitis eſſe videntur, ipſamque potius occupare ſuperficiem. Minime tamen

---

(*a*) Tab. I. 68. 74.
(*b*) Tab. I. 77.
(*c*) Tab. I. 14. 14.
(*d*) Tab. III. 20. 20. 21.
(*e*) Tab. III. 37.

tamen continuatae ſunt ex fibrillis propriis fibrarum, quemadmodum fibrillae ſuperficiales ventriculi dextri continuabantur; ſed adhaerent finibus ſuis lateribus fibrarum, a quibus manifeſto diſtinctae ſunt.

Limites quibus in externa cordis ſuperfice ventriculus ſiniſter circumquaque terminatur. (*Tab. II. E. O. W. I. B. D. Y. Tab. III. A. B. C.*)

Limites externi ventriculi ſiniſtri multo limitibus dextri et ſimpliciores ſunt, et faciliores deſcriptu. Tres iſti pariter, vt dextri, natura et ſitu diuerſas, dextris tamen analogas, partes habent, quarum et duae, ſuperior inferiorque, prorſus eaedem ſunt, quibus et dexter terminatur ventriculus; ſcilicet quibus vterque in ſuperiori et inferiori cordis ſuperficie a ſe mutuo diſtinguitur, et quae ergo vtrique ventriculo communes ſunt; tertia poſterior propria eſt ſoli ſiniſtro, analoga tamen poſteriori parti limitum dextri.

Terminus ventriculi, ſeu limitum pars, ſuperior in crena. (*Tab. II. E. O. W. I. B.*)

Superior crena eſt, in qua dextri ventriculi fibrae externae finiuntur, nouaeque ſiniſtri incipiunt (*a*). Haec per totam longitudinem in ſuperiori ſuperficie cordis ſiniſtrum ventriculum terminat, a dextro diſtinguit; parvâ tamen poſterius ad baſin ſiniſtri particula (*b*) exceptâ, qua longior dextro ventriculus ſiniſter retrorſum prominet, pro-

(*a*) Tab. I. D. H. f. C. Tab. II. E. O. W. I.

(*b*) Tab. II. I. B. D.

proprioque dexterius, niſi ad ſeptum potius hanc partem referre velis, pariete (*a*) terminatur. Fouea nimirum dexterius triangularis (*b*), quae retro conum arterioſum eſt, inter conum et baſin aortae, ſiniſterius columna triangularis carnea (*c*), hanc ſedem propius ad baſin loco crenae occupant. Mentio iam vtriusque huius particulae in praecedenti diſſertatione de fibris externis ventriculi dextri facta, vbi, cum neque ad dextrum ventriculum, neque ad ſolitas fibras externas ſiniſtri, columna referri poſſit, tanquam ſepti pars continuata et fouea et columna conſiderata eſt. Haec ſedes ergo, ſiue pars ſepti ſit, ſiue potius, cum ſepti partem, vtrique ventriculo communem, non efficiat, ſingularis portio parietis ventriculi ſiniſtri, qua dextrorſum oblique et retrorſum hic reſpicit, prope baſin dexterius ſiniſtrum ventriculum terminat (*d*) qui crena hactenus (*e*) dextrorſum terminatus erat.

Terminus inferior in ſtria (Tab. III. A. B. C.)

Inferior pars limitum ſtria eſt, in praecedenti pariter Diſſertatione deſcripta. Haec ventriculum ſiniſtrum in inferiori ſuperficie per cordis longitudinem a baſi ad apicem vſque terminat et a dextro diſtinguit ventriculo.

Termi-

(*a*) Tab. II. I. B. D.
(*b*) Tab. II. 8.
(*c*) Tab. II. 7.
(*d*) Tab. II. I. B.
(*e*) Tab. I. C. Tab. II I.

Terminus poſterior ad baſin. Tab. II. B. D. Y. Tab. III. A. B.

Tertia denique, poſterior, eorundem limitum pars ad baſin ventriculi, vbi cum aorta haec baſis (*a*) et ſinu ſiniſtro (*b*) coniungitur, poſita eſt. Dimidiam quaſi ſiniſtram partem latitudinis cordis ad baſin in ſuperiori, (*c*) dimidiamque eandem in inferiori ſuperficie (*d*), haec linea emetitur, a crenae regione ad marginem vsque ſiniſtrum (*e*) ſuperius, inferius a margine ad ſtriam vsque (*f*), producta, dexterius quidem ipſa baſis aortae portiuncula (*g*) in ſuperiori ſuperficie, ſiniſterius autem filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, (*h*) in facie inferiori ſolo poſteriori ſiniſtro cartilagineo filo (*i*) expreſſa. His filis ergo maxime ventriculus ad baſin terminatur, et a ſinu ſiniſtro, quocum coniunctus eſt, in vtraque ſuperficie diſtinguitur. Parua portio parietis ventriculi eſt, quae ad partem anteriorem ſiniſterioremque baſis aortae ſe applicat, eaque terminatur. Sic vtriusque, ſiniſtri pariter ac dextri, ventriculi circumferentia externa tribus efficitur lineis coniunctis, quarum, duae rectae, eaedemque ventriculo vtrique communes, quibus ambabus ventriculus cum ventriculo coniungitur

(*a*) Tab. II. B. D.
(*b*) Tab. II. D. Y. Tab. III. A. B.
(*c*) Tab. II. B. Y.
(*d*) Tab. III. A. B.
(*e*) Tab. II. B. Y.
(*f*) Tab. III. A. B.
(*g*) Tab. II. B. D. 3.
(*h*) Tab. II. 3. Y.
(*i*) Tab. III. A. y. B.

iungitur, ſuperior altera in crena, (*a*) altera inferior ad ſtriam latam vtrinque (*b*), tertia poſterior curva, ſiue exciſa, cuiuis ventriculo propria, ad baſin poſita eſt, qua cum aorta ſinuque ſiniſtro ſiniſter ventriculus (*c*), dexter cum dextro ſinu, aorta, arteriaque pulmonali coniungitur (*d*). Sola differentia ea eſt, vt vna ſimplicior, parum vndulata, linea ſiniſtrum, compoſita potius ex tribus diuerſis, extremitatibus coniunctis, lineis dextrum poſterius ad baſin terminet ventriculum.

Ortus fibrarum (Tab. III. A. B. Tab. II. Y. D. B. I. O. E.)

Hac circumferentia externa ventriculi ſiniſtri perſpecta, haud difficilius erit, huius quam dextri definire fibras externas quoad ortum earum, quoad progreſſum et finem. Oriuntur pariter vt fibrae ventriculi dextri a partibus circumferentiae ſuae duabus, inſeruntur in vnam ſolam, quae ſupereſt, tertiam. Vt dextri vero fibrae a poſteriori et inferiori oriuntur ſuae circumferentiae partibus (*e*), inſeruntur in ſuperiorem (*f*); a poſteriori contra (*g*) et ſuperiori parte (*h*) ſiniſtri ventriculi fibrae ortum, in inferiori (*i*) finem, habent. Incipit ergo linea ortus in

(*a*) Tab. II. E. I. B.
(*b*) Tab. III. B. C. D. F.
(*c*) Tab. II. B. D. Y. Tab. III. A. B.
(*d*) Tab. II. I. F. I. B. L. z. Y. Tab. III. E. D. F.
(*e*) Tab. II. I. F. I. 9. B. L. z. Y. Tab. III. E. D. F.
(*f*) Tab. II. I. O. E. Tab. I. C. D.
(*g*) Tab. III. B. A. Tab. II. Y. D. B.
(*h*) Tab. II. I. O. E. Tab. I. C. D.
(*i*) Tab. III. B. C.

in ſuperficie cordis inferiori a principio fili cartilaginei poſte-rioris ſiniſtri. (*a*) Sequitur inde ductum huius fili ſiniſtrorſum ad marginem vsque (*b*); continuat in ſuperiori ſuperficie per filum cartilagineum ſiniſtrum anterius (*c*) ad nodulum vsque ſiniſtrum (*d*), totam ſic baſin ventriculi ambeundo. Hinc porro ad baſin aortae linea ortus fibrarum tranſit (*e*), eiusque dimidiam partem ſiniſtram (*f*) in ſuperficie anteriori occupat. Solae quidem ſuperius dictae columnae (*g*) et, quae foueam efficiunt, fibrae (*h*) a baſi aortae oriuntur in hoc corde, quae ipſae, in crenam inſertae, ad contractionem ventriculi vix quidquam conferre poſſunt, neque in ſuperficiem ſuperiorem tranſeunt. In alio tamen corde, vbi dexterius columna a baſi aortae oriebatur, notabilem faſciculum fibrarum a parte ſiniſtra baſis aortae oriri, in ſuperficiem ſuperiorem ventriculi deſcendere, fibrasque ſuas producere, vidi. Haud ſolae ergo columnae fibrae, aut quae foveam efficiunt, ſed ſolitae quoque externae ventriculi ſiniſtri, ſaepius a baſi aortae oriuntur. In media hac parte baſis aortae linea ortus quaſi interrupta eſſe videtur; cum a crenae principio nunc, (*i*) remoto a baſi aortae (*k*), fibrae oriri incipiant, interſtitio

(*a*)

(*a*) Tab. III. B.
(*b*) Tab. III. A.
(*c*) Tab. II. Y.
(*d*) Tab. II. 3.
(*e*) Tab. II. D.
(*f*) Tab. II. D. B.
(*g*) Tab. II. 7.
(*h*) Tab. II. 8.
(*i*) Tab. II. I. Tab. I. D.
(*k*) Tab. II. B. D.

(*a*) ipſa columna, a baſi aortae orta, inſerta in crenae principium, occupato. Hinc noua ergo ortus fibrarum linea per totam crenam (*b*), ad apicem cordis et crenae finem vsque, continuat, ex quo vltimae tandem fibrae externae ventriculi ſiniſtri oriuntur. Incipiunt ergo oriri ſiniſtri ventriculi fibrae in ſuperficie cordis inferiori, ex angulo inter baſin et ſtriam (*c*). Circumdat hinc linea ortus earum ventriculi ſiniſtri baſin (*d*), deſcendit inde per crenam (*e*), deſinitque in ſuperficie cordis ſuperiori ad finem crenae. (*f*) Dextri ventriculi fibrae in ſuperiori cordis ſuperficie oriri incipiebant ex angulo inter baſin et crenam (*g*). Circumdabat hinc linea ortus baſin ventriculi dextri (*h*), deſcendebat inde per ſtriam, (*i*) et deſinebat in inferiori ſuperficie ad finem ſtriae (*k*).

Inſertio (Tab. III. B. C. Tab. I. E. D.)

Pariter ergo vt dextri ventriculi, ſiniſtri quoque fibrae ex maiori longe circumferentiae externae ventriculi parte oriuntur, inſeruntur in longe minorem. Duas fere tertias partes in ventriculo vtrouis ortus, haud plus quam vnam inſertionis, linea continet. Hinc pariter vti in dex-

 tro

(*a*) Tab. II. B. I. D. I.
(*b*) Tab. II. I. W. O. E.
(*c*) Tab. III. B.
(*d*) Tab. III. B. A. Tab. II. Y. D .B
(*e*) Tab. II. I. O. E.
(*f*) Tab. II. E. Tab. I. D,
(*g*) Tab. I. C.
(*h*) Tab. I. C. I. Tab. II. F. 9. B. L. z. Y. Tab. III. A. B.
(*i*) Tab. III. B. C.
(*k*) Tab. III. C.

tro ventriculo faſciculi ad faſciculos frequenter, fibrae ad fibras, ſe applicant vicinas, nec ſingulae ad inſertionis ſedem ipſae perueniunt, communibus tandem finibus plerisque, aliarumque, quibus adhaerent, fibrarum ope, in ſtriam inſertis. Quamuis autem haud parua pars fibrarum a maiori circumferentiae parte ortarum hac ratione, ſicut in dextro ventriculo, conſumitur; peculiaris tamen praeterea modus eſt, quo in ſiniſtro pars maxima fibrarum concentratur. Occupata nimirum ſtria fibris prioribus, a filo imprimis cartilagineo ſiniſtro poſteriori, deinde et nonnullis ab anteriori, ortis; quae reliquae fere a crena oriuntur, radiatim concurrendo partim ad ſtriae finem in eam marginis partem, quae fini huic et foco ſuperiori intercedit, in inferiori cordis ſuperficie (*a*), partim in ſuperiori in focum hunc ipſum, a ſtria remotum (*b*), tanquam in punctum inſertionis ſingulare, quod ſtriae accedit, inſeruntur.

Progreſſus.

Ita caeterum hae fibrae, a dictis circumferentiae partibus ortae, ad ſtriam progrediuntur, vt dextrorſum oblique et antrorſum, ſtriam et apicem verſus, quae in inferiori cordis ſuperficie verſantur (*c*), ſiniſtrorſum et antrorſum oblique, marginem cordis ſiniſtrum verſus et apicem, quae ſuperiorem occupant ſuperficiem (*d*), incedant; ſicuti et dextri ventriculi fibras pari directione progredi

(*a*) Tab. III. C.
(*b*) Tab. I. E.
(*c*) Tab. III. B. A. C.
(*d*) Tab. I. 59. C. D. E.

gredi in praecedenti Diſſertatione notatum eſt. Haec tamen notabilis differentia inter vtriusque ventriculi fibras intercedit, vt, ſicuti dextri ventriculi fibrae transuerſali ductui vbique proximae, in variis etiam ſedibus omnino transuerſales ſunt, et paſſim potius verſus baſin adſcendunt, fibrae ventriculi ſiniſtri nusquam non multo ſint propiores ductui longitudinali, variisque in ſedibus, imprimis circa marginem (*a*), fere tanquam longitudinales ipſae conſiderari poſſint. Si longitudinem cordis ipſius eiusque axin reſpicis, plurima pars funium maiorum in ſuperiori ſuperficie ventriculi, vbi ad marginem perueniunt, (*b*) parum ſane abeſt, quin parallelae ſint axi cordis. Et quae propiores apici fibrae circa marginem flectuntur, ſimili ductu incedunt. (*c*) Si ſitum reſpicis cordis, recta fere longae ſuperficiei inferioris fibrae (*d*) a poſteriori ad anteriorem partem progredi videntur.

Ordines fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri.

In quatuor ordines quaſi ſiniſtri ventriculi fibrae externae diuidi poſſunt. Eorum primum fibrae efficiunt, a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro ortae (*e*), in poſteriorem maiorem partem ſtriae inſertae (*f*). Secundus funium eſt magnorum, a filo ortorum cartilagineo anteriori ſiniſtro, (*g*) gibboſam ventriculi partem ad baſin in ſuperiori

(*a*) Tab. I. 85. 86.
(*b*) Tab. I. 62. 69. 76. 79.
(*c*) Tab. I. 85. 86. 91. 98. E.
(*d*) Tab. III. 15. 18. 23. 28.
(*e*) Tab. III. B. A.
(*f*) Tab. III. 6. 19.
(*g*) Tab. II. 29. 21. 7. 8.

riori ſuperficie occupantium, (*a*) inſertorum in partem ſtriae reliquam, et eam marginis partem, quae fini ſtriae et foco ſuperiori intercedit (*b*), Tertius paruus ex fibris conſtat paucioribus, a ponte productis, (*c*) laminam quaſi efficientibus, confuſam tamen vtrinque cum fibris vicinis (*d*), inſertis in partem marginis eandem, proxime ad focum ſuperiorem, et in focum hunc ipſum (*e*), figuram vna cum prioribus in hac facie inferiori perficiendo radiatam inferiorem. Quartus denique ordo eſt fibrarum, quae a parte crenae, inter pontem et apicem cordis contenta (*f*), oriuntur, quae marginem vix tranſeunt (*g*), neque in inferiorem prodeunt ventriculi ſuperficiem. In focum hae fibrae, niſi omnes, maximam partem tamen radiatim inſeruntur ſuperiorem, figuramque in ſuperiori ſuperficie ad apicem efficiunt radiatam (*h*), cuius in ſuperioribus mentio facta eſt.

Fibrae ordinis primi (Tab. III. 6. 8. 10. 14. 17. 18. 19.)

Fibrae ordinis primi a parte ſiniſteriori tenuiorique fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri (*i*), et a dimidio interſtitio (*k*) inter vtrumque, anterius et poſterius, filum ſini-

(*a*) Tab. I. 59. 86.
(*b*) Tab. III. 19. 25. 31. 32.
(*c*) Tab. I. 87. 88.
(*d*) Tab. I. 83. 84. 89.
(*e*) Tab. III. 47. C.
(*f*) Tab. I. 89. D.
(*g*) Tab. I. 85. 91. E.
(*h*) Tab. I. E.
(*i*) Tab. III. B. y. x.
(*k*) Tab. III. A.

ſiniſtrum oriuntur. Prima craſſiorque pars fili, a ramo anaſtomotico (*a*) orta, fibras largitur breues et craſſas, quae continuo in ſtriam deſcendunt (*b*) eamque efficiunt, nec quidquam ad parietem contribuunt formandum ventriculi ſiniſtri. Sola pars reliqua cum dimidio interſtitio has fibras producit. Hae craſſae teretes ſatisque eminentes et diſtinctae a filo oriuntur (*c*), ſuperque marginem baſis tranſeunt; vbi vltro vero in ſuperficiem deſcendunt (*d*), planiores fiunt minusque diſtinctae. Oblique a filo dextrorſum et antrorſum, ſtriam et apicem verſus, in plana hac inferiori ſuperficie cordis progrediuntur; vt multo tamen longitudinalibus fibris quam transuerſalibus ſint ſimiliores. Quum a parte baſis media filum cartilagineum poſterius oriatur (*e*), et ſiniſtrorſum inde ad marginem ſe extendat (*f*) ſiniſtrum, fibraeque ab eo ortae dextrorſum oblique progrediantur; retrogrado hae fibrae ductu, et contra fili, ex quo oriuntur, directionem incedunt, ſolae quidem omnium fibrarum externarum cordis. Primae earum breuiſſimae ſunt, continuo, vbi ortae, in poſtremam partem ſtriae propinquam inſertae (*g*). Hinc quo ſiniſterius ex filo, aut interſtitio inter bina, poſterius anteriusque, fila

(*a*) Tab. III. 4.
(*b*) Tab. III. 7. 7.
(*c*) Tab. III. 6. 8. 10. 10. 14.
(*d*) Tab. III. 15.
(*e*) Tab. III. 4.
(*f*) Tab. III. y. x.
(*g*) Tab. III. 6. 8.

ſila oriuntur (*a*), et longiores fiunt et remotius a baſi in ſtriam inſeruntur (*b*). Curuatae pauliſper, imprimis vbi propinquae ſunt ſtriae, ducuntur; paſſim vndulatae, nonnullis in ſedibus crispae, incedunt, quod maxime circa inſertionem in ſtriam obſeruatur. Frequentius etiam contiguae (*c*) ſecedunt a ſe inuicem fibrae (*d*), iterumque coniunguntur, interſtitia oblonga acutis finibus formando, fibrillis plerumque repleta (*e*). Accedentes ad ſtriam antrorſum flexae, fere parallelae ſtriae (*f*) in marginem eius ſiniſtrum inſeruntur, duasque tertias partes ſaltim poſteriores ſtriae hac ſua inſertione occupant (*g*). Nexus fibrillis paſſim efficitur, anterius maxime et prope ſtriam (*h*); poſterius et in media parte (*i*) coalitione inordinata hae fibrae inter ſe cohaerere videntur.

Ordo ſecundus. Funes. (*Tab. II.* 7. 8. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. *Tab. I.* 81. 59. 86. *Tab. III.* 22. 23 25. 39. 40. 41. 42.)

Ordo fibrarum ſecundus maxime prae caeteris tum ſiniſtri tum dextri ventriculi fibris elegantia et magnitudine faſciculorum funivmque, quos collectae fibrae efficiunt, et

(*a*) Tab. III. 10. 12. 14. 17.
(*b*) Tab. III. 11. 13. 16. 19.
(*c*) Tab. III. 15. 18. 18.
(*d*) Tab. III. 20. 20. 20.
(*e*) Tab. III. 20. 20. 20. 21.
(*f*) Tab. III. 11. 13. 19.
(*g*) Tab. III. 19.
(*h*) Tab. III. 20. 20. 20. 21.
(*i*) Tab. III. 15. 28.

et ramificatione et largis interſtitiis, quibus diſtincti faſciculi ſunt, eminet inſignemque ſe praebet. Craſſiſſimi equidem funium ſunt, qui a principio et parte craſſiori fili cartilaginei anterioris oriuntur (*a*). Qui ſiniſtrorſum inde ab extenuato filo et ab interſtitio inter bina fila ſiniſtra originem ducunt, tenuiores ſucceſſive evadunt (*b*); nec ipſi craſſiſſimi, a fili principio orti, ad inferiorem cordis ſuperficiem vsque perueniunt, quin ramificatione diuiſi in minores funiculos (*c*), tanquam ſolitae magnitudinis fibrae demum in inferiorem ſuperficiem prodeant (*d*) continuentque. Solam ergo dimidiam poſteriorem partem ſuperficiei ſuperioris ventriculi ſiniſtri hi funes ramificati occupant (*e*), in eaque ſola apparent.

Ortus.

Oriuntur ab interſtitio dimidio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra (*f*), a toto filo ſiniſtro anteriori (*g*), a nodulo cartilagineo ſiniſtro (*h*), et a parte ſiniſtra anterius baſis aortae (*i*). Qui ab interſtitio oriuntur tenuiores, minima ſui parte in ſuperficie ſuperiori verſantur (*k*), quin continuo circa marginem flexi in longas ſuperficiei

 infe-

(*a*) Tab. II. 21. 22. 23. Tab. I. 82. 81. 70.
(*b*) Tab. II. 26. 27. 28. 29. Tab. I. 62. 61. 60. 59.
(*c*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*d*) Tab. III. 22. 39.
(*e*) Tab. I. 81. 59. 86.
(*f*) Tab. II. y.
(*g*) Tab. II. 4. 3.
(*h*) Tab. II. 3.
(*i*) Tab. II. D. B.
(*k*) Tab. II. 29. Tab. I. 59.

inferioris fibras (*a*) abeant. Vti dexterius inde a filo oriuntur; et funes continuo craſſiores euadunt, magisque ramificati, et longioribus ſui partibus per ſuperiorem ſuperficiem decurrunt, antequam marginem attingunt ſiniſtrum (*b*), quo ſuperato in inferiorem ſuperficiem deſcendunt Maximi funes ſunt, qui a prima parte fili ipſius oriuntur; qui porro dexterius a nodulo cartilagineo et ab aorta originem habent, minores paulo, in hoc ſane corde, euadunt.

Progreſſus funium in ſuperiori ſuperficie.

Orti a partibus illis funes, a filo nempe cartilagineo anteriori ſiniſtro, a nodulo ſiniſtro, et ab aorta, oblique ſiniſtrorſum verſus marginem et antrorſum apicem verſus decurrunt, vt longitudinali ductui tamen, quo verſus apicem tendunt, propiores ſint quam transuerſali, quo verſus marginem progrediuntur; imprimis ſi ad axin cordis, baſi verticalem, reſpicias. Progrediuntur hac directione arcuatim quodammodo, marginem verſus magis primo tendentes (*c*), deinde itinere continuato magis apicem verſus flexi (*d*), vt proximi longitudinali ductui in ipſo margine ſint, multoque quam prope filum propiores.

Enumeratio funium in hoc corde.

Tres primi funiculi (*e*), ab interſtitio orti, cito et integri in hoc corde ad marginem perueniunt, ſuperque eum

---

(*a*) Tab. III. 17.
(*b*) Tab. I. 64. 67. 70.
(*c*) Tab. I. 64. 67.
(*d*) Tab. I. 66. 69.
(*e*) Tab. I. 59. 60. 61.

eum deſcendunt. Quartus (*a*), in duos diuiſus ramos, circa marginem ſe flectit. Quintus (*b*) latior in quatuor ramos ſeu fibras prope marginem diuiditur. Sextus (*c*) longior aliqua ſui parte ſub priorem ſe recipere in hoc corde videtur. Septimus (*d*), omnium maxime inſignis in hoc corde longitudine, amplitudine et ramificatione, interſtitiisque, fibrillis repletis, quibus et ipſe funis a vicinis funibus, et rami eius a ſe inuicem, diſtincti ſunt, in tres funes minores diuiditur (*e*), latius diſperſos, interſtitiisque diſtinctos, diuiſos porro in fibras haud tenues, longas, ſuper marginem deſcendentes. Notabile interſtitium (*f*), quo hic funis (*g*) in hoc corde a praecedente (*h*) diſtinguitur, longitudine, largitate et fibrillarum elegantia. Porro et bina illa interſtitia (*i*), quibus rami a ſe mutuo diſtinguuntur. Imprimis hoc (*k*), quo medius ramus a dexteriore ſeparatur, fibrillis occupatum, craſſitie ſolitis fibris minime cedentibus, ſingularemque concurrendo funiculum efficientibus (*l*), qui porro ipſe in duas inſignes fibras (*m*) diuiditur. Haec omnia tamen in hoc corde tantum, quae de ſingulorum ſcilicet funium peculiari forma et diſtribu-

 tione

(*a*) Tab. I. 62.
(*b*)
(*c*) Tab. I. 67.
(*d*) Tab. I. 70.
(*e*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*f*) Tab. I. 68.
(*g*) Tab. I. 70.
(*h*) Tab. I. 67.
(*i*) Tab. I. 74. 77.
(*k*) Tab. I. 77.
(*l*) Tab. I. 78.
(*m*) Tab. I. 86.

tione eorumque interſtitiis dicuntur, ſe ita habere opinor, variantibus procul dubio in aliorum corporum cordibus numero, magnitudine, et figura, his funibus deſcriptis. Octavus funis (*a*), praecedente minor in hoc corde, bifidus ad ſequentem progreditur, videturque binis ſuis ramis ſub illum ſe recipere. Nonus (*b*) vltimus eſt eorum, qui in parietem externum ventriculi tranſeunt, eumque efficiunt. Hic tectus poſterius arteria coronaria ſiniſtra (*c*), a nodulo oritur cartilagineo ſiniſtro (*d*), et aliqua parte a baſi aortae. Deinde bifidus ad pontem ſe applicat (*e*), receptoque dextro ramo ſeptimi funis (*f*), pontem laminamque, ex illo productam, latitudine auget. Reperi in alio corde praeter hos, a filo et nodulo ortos, alios etiam funes, ab ipſa baſi aortae natos, in ſuperficiem externam ventriculi diſtributos. In hoc columna iam ſequitur ſaepius memorata breuis (*g*), ab aortae baſi orta, in poſtremam partem crenae inſerta. Haec in illo corde dexterius a latere anteriori baſis aortae oriebatur. Denique fibrae foueae triangularis (*h*) ab aortae baſi ortae, pariter in partem profundiorem crenae ſe inſerere, vnamque cum columna ſepti vel potius dextri parietis ventriculi ſiniſtri partem efficere videntur.

Fu-

(*a*) Tab. I. 81.
(*b*) Tab. I. 82. Tab. II. 21.
(*c*) Tab. I. c.
(*d*) Tab. II. 3.
(*e*) Tab. I. 82. 84.
(*f*) Tab. I. 72.
(*g*) Tab. II. 7.
(*h*) Tab. II. 8.

Funium in fibras reſolutorum progreſſus in inferiori ſuperficie et inſertio.

Funibus ea ratione in fibras reſolutis, ſuper marginem illae deſcendunt oblique, dimidiamque circiter eius partem poſteriorem tranſitu occupant (*a*). Perueniunt in ſuperficiem ventriculi inferiorem, in qua flexae nunc dextrorſum oblique, a parte hac dimidia poſteriori marginis (*b*) ſtriam et apicem verſus, progrediuntur. Vti proximae erant ductui longitudinali, cum ſuper marginem tranſirent; eadem hac, fere longitudinali, directione in inferiori ſuperficie continuant. Sic vltimae fibrae (*c*) ad extremum apicem cordis et partem extremam marginis tranſeunt (*d*) non modo, in quem inſeruntur (*e*), ſed tota pars quoque ſiniſterior anterior ſuperficiei inferioris, vacua a fibris ordinis primi (*f*), his fibris ordinis ſecundi fere occupatur. Parua modo portio eius ad marginis partem anteriorem reſtat (*g*) pro fibris, a ponte productis. Longae caeterum fibrae ſunt, parum curuatae, aequali fere inter ſe ductu progredientes. Vbi ad ſtriam perueniunt, paululum apicem verſus flexae, angulis verſus baſin acutis, in eam inſeruntur, tertiamque fere anteriorem eius partem ad extremum apicem vsque ſua inſertione occupant. Dum apicem verſus flexae priores harum fibrarum (*h*) partim in

(*a*) Tab. I. 59. 86.
(*b*) Tab. III. 17. 39.
(*c*) Tab. I. 86. Tab. III. 39.
(*d*) Tab. III. 40. 41.
(*e*) Tab. III. 42.
(*f*) Tab. III. 17. 18. 19. 39. 40. 41. 42. C.
(*g*) Tab. III. 45. 46. 47. 51.
(*h*) Tab. III. 17. 18. 19. 27. 28. 29. 30. 31. 32.

in apicem, ſiue extremitatem marginis ſiniſtri ſtriae, ipſum inſeruntur (*a*), partim, etiamſi eo non perueniant, ſed poſterius paulo in marginem ſtriae inſerantur (*b*), in idem tamen punctum (*c*) ſua directione tendere videntur, reliquae (*d*) in idem tranſeunt punctum; radios eo concurſu referunt, in vnum focum collectos, partemque efficiunt radiatae figurae inferioris, cuius focus (*e*) in extremitate marginis ſiniſtri ſtriae (*f*) in extrema marginis ventriculi parte (*g*) ſitus eſt, radiorum caetera pars fibris conſtat, a ponte productis (*h*), quae omnes ſcilicet in dictam partem marginis (*i*) concurrendo ſe inſerunt. Funes in ſuperiori ventriculi ſuperficie fibrillis ſaepius dictis longiſſimis inter ſe connectuntur. Fibrae longae ſuperficiei inferioris, in quas illi reſolvuntur, coalitione maxime inordinata cohaerere videntur.

Ordo tertius. (Tab. I. 82. 87. 88. 85. 86. Tab. III. 45. 46. 47. 51.) Figura radiata inferior (Tab III. 25. 30. 35. 41. 47. 50. C.)

Tertius ordo fibrarum, productarum ex ponte, minus ſpectabilis eſt. Tranſeunt dextri ventriculi fibrae interiectae, et aliqua pars faſciae infundibuli magnae (*k*), ſuper

(*a*) Tab. III. 28. 29. 30. 31. 32.
(*b*) Tab. III. 23. 24. 25.
(*c*) Tab. III. C.
(*d*) Tab. III. 34. 35. 40. 41. 42.
(*e*) Tab. III. C. 47.
(*f*) Tab. III. C.
(*g*) Tab. III. 47. 47. 50.
(*h*) Tab. III. 45. 46. 47.
(*i*) Tab. III. 47. 47. 50.
(*k*) Tab. I. 3. 9. 10.

ſuper crenam ſuperque arteriam coronariam ſiniſtram, qua pontis inſtar hae fibrae eleuatae ſuſtinentur, in ſuperficiem ventriculi ſiniſtri (*a*). His nonus in hoc corde poſterius ſe addit funis (*b*), et ramus dexterior ſeptimi funis (*c*), quibus aucta faſciola oblique ſiniſtrorſum vna ad marginem, et apicem verſus antrorſum, deſcendit (*d*), ductu ſimili funium ductui, quo, vbi ad marginem appropinquant, apicem verſus flexae fibrae parum a longitudinalibus differunt (*e*). Hoc ductu circa marginem flectuntur, in ſuperficiemque prodeunt inferiorem (*f*), et porro continuant. Sic plane a margine, vbi emergunt (*g*), ad apicem progrediuntur (*h*), et parallelae fere ducuntur in inferiori hac ſuperficie reliquae marginis parti (*i*) ad apicem vsque, et omnem a funium fibris vacuam partem ſuperficiei hac ſua diſtributione occupant (*k*). Vt vltimae, apici propiores, fibrae, ex ponte productae, vbi ad marginem ex ſuperiori ſuperficie deſcendunt, per ipſum fere reliquum marginem ad focum ducantur, neque in inferiori ſuperficie vlla ſui parte emergant. Inſeruntur hae fibrae omnes ſimul ſumtae in eam partem marginis ventriculi ſiniſtri (*l*), quae fini

---

(*a*) Tab. I. 87.
(*b*) Tab. I. 82. 83. 84.
(*c*) Tab. I. 72.
(*d*) Tab. I. 88.
(*e*) Tab. I. 85. 86.
(*f*) Tab. III. 45. 48. 51.
(*g*) Tab. III. 45. 51.
(*h*) Tab. III. C.
(*i*) Tab. III. 45. C
(*k*) Tab. III. 45. 51. C.
(*l*) Tab. III. C. 47. 47. 50.

ſini ſtriae et ſedi ſuperioris ſoci, pollicem quaſi in hoc margine a ſtria diſtantis, intercedit; ſiniſterius iuxta fibras ordinis ſecundi et proxime ad focum ſuperiorem (*a*), quem quaſi, dum inferiorem focum perficiunt, cum eodem coniungunt. Haud ſingulae tamen ad focum perueniunt fibrae. Quaedam earum longiores (*b*) ad illum pertingunt. Aliae breuiores, comprehenſae inter longas, antequam ad focum perueniunt, in ipſas has longas inſeruntur (*c*), reliquo inter eas interſtitio ſingularibus fibrillis (*d*) repleto. Aliae ſub angulo inſertionis priorum ſe recipere (*e*), aliae ſuper alias tranſire, videntur. Singulae tamen eo ductu feruntur, vt ſimul ſumtae omnes radiatam illam figuram efficiant. Coalitione inordinata hae fibrae ordinis tertii in ſuperiori ventriculi ſuperficie maxime (*f*), vbi margini vero accedunt, diſtinctiores, aliaeque prae aliis eminentes (*g*), et dum per inferiorem continuant ſuperficiem, longae, ſibi mutuo parallelae, fibrillis breuiſſimis, aegre conſpicuis, inter ſe cohaerere videntur (*h*). Manifeſtis longisque et pulchris fibrillis, vbi foco accedunt connectuntur (*i*). Harum quaedam ſingulari genere fibrae quaſi, ſatis craſſae, breues, eſſe videntur obliquae (*k*), quibus ſolitae fibrae connectuntur.

Ordo

(*a*) Tab. III. 50.
(*b*) Tab. III. 29. 30. 31. 32. 45. 46. 47.
(*c*) Tab. III. 44. 50. 42.
(*d*) Tab. III. 38. 38.
(*e*) Tab. III. 51. 36. 37.
(*f*) Tab. I. 84. 88.
(*g*) Tab. I. 85. 86.
(*h*) Tab III. 46. 49. 51.
(*i*) Tab III. 37.
(*k*) Tab. III. 43. 43.

Ordo quartus (*Tab. I.* 89. 85. *E. D.*) *Figura radiata ſuperior* (*Tab. I. E.* 91. 98. 100. 103. 104. 57.)

Quartus fibrarum ordo totus in ſuperiori cordis ſuperficie verſatur, nec vlla in inferiorem fibra deſcendit. Inſeruntur ſcilicet in ipſum marginem ſiniſtrum hae fibrae, eiusque anteriorem, apici propiorem, partem (*a*), figuram radiatam in hac ſuperiori ſuperficie efficiendo. Oriuntur a maxima parte crenae, ab ea eius ſede (*b*), vbi ramus ſecundus arteriae coronariae ſiniſtrae, quam pons hactenus tegit, ex carne emergit (*c*), indeque porro a tota reliqua parte ad apicem cordis vsque (*d*). Videntur hinc varia ratione oriri, quemadmodum in praecedenti Diſſertatione de crena dictum eſt. Serratim alibi principia fibrarum ventriculi ſiniſtri finibus fibrarum dextri interponuntur (*e*). Alibi et maximam partem interrupta continuatione fibrae ſiniſtri a dextri fibris oriri videntur (*f*). Oblique hinc ſiniſtrorſum et antrorſum, marginem et apicem verſus, progrediuntur (*g*). Magis tamen paululum praecedentium ordinum fibris a longitudinali ductu recedunt. Quae primae, baſi propiores (*h*), aequali fere cum dextri ventriculi fibris, ex quibus oriuntur, obliquitate procedunt. Mediae primis principiis quidem apicem verſus deſcendunt paululum, mox vero flexae propiores ductui transuerſo per

(*a*) Tab. I. 85. E.
(*b*) Tab. I. 89.
(*c*) Tab. I. h.
(*d*) Tab. I. 89. D.
(*e*) Tab. I. 89.
(*f*) Tab. I. 99. 102.
(*g*) Tab. I. 94. 95.
(*h*) Tab. I. 89. 90.

per ſuperficiem continuant (*a*). Proximae apici fibrae omnium maxime ad transuerſum ductum vergunt (*b*). Vbi vero ad marginem accedunt hae fibrae omnes, apicem verſus flexae, haud magis quam praecedentium ordinum fibrae a ductu longitudinali recedunt (*c*). Hac directione confuſae admodum fibrae per maximam partem ſuperficiei ſuperioris ventriculi continuant, inordinata coalitione vbique confluentes, aegrius a ſe mutuo diſtinguendae (*d*). Ad marginem vbi accedunt, diſtinctae prodeunt, aliis partim prae aliis eminentibus (*e*), partim diuerſis paulisper directionibus progrediendo (*f*). Pulcherrima omnium in ſiniſtro ventriculo radiata fibrarum diſpoſitio earumque cum inferioribus fibris radiatis communicatio eſſe videtur; niſi funium forte diſpoſitionem eorumque ſpecioſas fibrillas, quibus illi nectuntur, praetuleris. A primo ortu ex crena hae fibrae iam ita diſpoſitae ſunt, vt continuando paulatim ad ſe mutuo accedant; cum primae, priores baſi (g), ad longitudinem magis, vltimae, apici propiores (*h*), ad transuerſalem ductum vergant, quae ipſo ex crenae fine prodeunt (*i*), transuerſim progrediantur. Plurimum tamen id confert, quod fibrae appropinquando ad marginem eo magis verſus apicem flectantur, quo

(*a*) Tab. I. 97.
(*b*) Tab. I. 102. 104. D.
(*c*) Tab. I. 85. 91. 98.
(*d*) Tab. I. 94. 95.
(*e*) Tab. I. 91.
(*f*) Tab. I. 95. 85.
(*g*) Tab. I. 89. 90.
(*h*) Tab. I. 102. 104.
(*i*) Tab. I. D.

quo propiores baſi ſunt (*a*), eo directius ad marginem tranſeant, quo propius apici ex crena oriuntur (*b*). Vti vero haud integram perfectamque ſtellam fibrae efficiunt ad mentem *Loweri* et *Senaci*, quemadmodum in ſuperioribus notatum eſt; ita nec adeo radiatam exacte referunt figuram, vt ſimplex vnum punctum ſiue areolam rotundam pro foco, ſed ſtriam potius, habeant, oblongam, ſiue linearem, ad marginis longitudinem in ipſo margine (*c*) ductam. In hanc ſe fibrae ex ſingulis crenae punctis confertim conferunt. Quamuis aliam atque diuerſam faciem prae ſe ferre videntur figura radiata inferior atque haec ſuperior; analoga prorſus tamen fibrarum vtriusque diſpoſitio eſt et inſertio et modus concentrationis. Nimirum vti in inferiori, ſic pariter in ſuperiori, figura radiata haud omnes fibrae ad ipſum focum ſeu ſtriolam, quae focum efficit, pertingunt. Sunt quaedam ſparſim diſpoſitae (*d*), quae ſolae longiores eo perueniunt; his aliae interponuntur, quae partim ad longas ſe applicant (*e*), in easque inſeruntur, partim inter duas longiores vicinas et concurrentes interceptae ſub angulum earum, quem concurrendo aut confluendo efficiunt, ſe recipere videntur. In ea re prorſus conueniunt cum fibris radiatis inferioribus, quae ſimili ratione diſpoſitae, ſimili ſe ad ſe mutuo applicant, aliaeque ſub alias recipiunt. Quo ergo funium, quo, quae a ponte ortum habent, fibrae ducuntur, quo

 fini-

(*a*) Tab. I. 85. 91.
(*b*) Tab. I. 99. 100. 102. 103. 104.
(*c*) Tab. I. E.
(*d*) Tab I. 98 91.
(*e*) Tab. I. 95.

finiuntur, poſtquam ſuper marginem flexae in inferiorem tranſierunt ventriculi ſuperficiem, eo penitus ipſo modo et quarti ordinis fibrae, prioribus breuiores, in ſuperiori iam ſuperficie ducuntur, eodemque ad marginem modo finiuntur. Videntur ergo omnino vtraeque radiatae fibrae tanquam vna ſimilium fibrarum ſeries, ſuperioresque vti inferiorum continuatio, conſiderari poſſe, modo vt focos, in quos ſe colligunt, diuerſos habeant. Coalitione inordinata fibrae ordinis quarti prope crenam et per maximam partem ſuperficiei ſuperioris inter ſe cohaerent. Prope marginem diſtinctae fibrillis inconſpicuis connectuntur.

De fine fibrarum ventriculi dextri nouarumque ſiniſtri initio ad crenam. Annotatio.

Dictum eſt in Diſſertatione de fibris externis ventriculi dextri, vbi de natura crenae agebatur, finiri dextri ventriculi fibras, nouasque oriri ſiniſtri, in crena; finiri ſiniſtri, oriri dextri, in ſtria; vti ſententia fuit Illuſtr. *Senaci*; non continuari ex dextro ventriculo fibras in ſiniſtrum ad crenam, ex ſiniſtro in dextrum ad ſtriam, vti viſum erat *Lowero* et *Winslowo*. Vidimusque in citata disdiſſertatione, faſcias, baſi propiores, imprimis infundibuli faſciam magnam et angularem, quae a filis cartilagineis dextris, anteriori et poſteriori, oriuntur, fibris conſtare latis, quaecunque a ſtria oriuntur, fibras tenues eſſe. Vt manifeſto latae ſint, quae a filis oriuntur, tenues, quae ortum a ſtria habent, quae quippe a communi binorum poſteriorum, dextri et ſiniſtri, filorum principio ortae per ſtriam verſus apicem prius ducuntur, deinde flexae in dextri ventriculi fibras abeunt. Iam mirum eſt, idem et in ſiniſtro obſeruari ventriculo; funes craſſos eſſe, qui a filo oriuntur car-

cartilagineo anteriori ſiniſtro, ſimplices fibras, quae originem a crena ducunt. An eam ob cauſam id forte, quod, quae a filis oriuntur, vere hinc ortae, vera principia, ideoque craſſiora, ſint caeteris; quae dictae contra oriri a crena et ſtria, ab illis prioribus continuentur potius, propterea que tenniores euadant? Nimirum non, ſicut in ſolitis musculis, parallelas iuxta ſe mutuo vbique et aequales fibras cordis, ſed neruorum modo in faſciculos collectas, iterumque varie diſperſos in ramos, nec raro per anaſtomoſin denuo coniunctas incedere, notatum eſt in ſuperioribus. Et manifeſtum huius rei exemplum in funibus ventriculi ſiniſtri apparet, qui in ramos primo minores diuiſi in ſimplices tandem fibras reſoluti per inferiorem ſuperficiem ventriculi continuant. An tenuitas ergo a crena ſtriaque prodeuntium fibrarum, continuatas et ramos has fibras, craſſities ortarum a filis, has truncos eſſe, demonſtrat? Non prorſus improbabile hoc argumentum. At tamen multa alia priorem potius, ſuperius explicatam, ſententiam de ortu et fine fibrarum ad crenam et ſtriam mihi ſuadere videntur.

CAE-

CAENOPTERIS,

NOVVM E FILICIBVS GENVS,

DESCRIPTVM

a

P. J. BERGIO.

Triginta proxime elapſis annis ſcientia botanica plus augmenti nacta eſt, quam integro alias praeterlapſo ſeculo, quodque indefeſſo ſtudio operaeque clariſſimorum plurium virorum tribuendum, qui nec ſumtibus, nec labori, nec periculo parſerunt, vt nouas detegerent ſtirpes. Sic plurima a peregrinatoribus ruſſicis detecta; plurima a *Thunberg*, *Sparrmann*, *Maſſon*, *Auge*, qui Caput bonae ſpei percurrerunt; *Thunberg* hoc non contentus Indiam orientalem, immo Iaponiam adiit. Illuſt. *Banks* cum ſocio *Solander*, vterque *Forſter* terras auſtralis maris viſitarunt; *Sonnerat*, *Commerſon*, *Aublet*, partim Americam auſtralem, partim inſulas Mauritii et Burboniam, vt plantas carperent, petierunt. Miſſionarii hiſpanici multas herbas ex America Madritum mittunt, pariter ac Sveci *Swartz* et *Hornſtedt* ex vtraque India ad ſuos amicos. Cel. *Mutis*, in America calida degens, beatiſſimo ſolo, plantas obuias legit, deſcribit, pingit, publicas facturus opere ſplendidiſſimo, quod molitur. Sic ſcientia botanica quotidie creſcit.

Ex

Ex horum Cel. virorum collectaneis quaedam eligere mihi licuit, pluraque noua inueni. Spero Ill. Academiam Petropolitanam benigne excepturam, ſi hac vice nouum inter Filices genus deſcribam.

Caenopteris.

Charact. Generis: Fructificationes frondoſae. Punctum marginale ſolitarium, rima concaua, ſcobe parua capitulata ſerta.

1. CAENOPTERIS (furcata) fronde bipinnata: pinnulis imis furcatis, rachi compreſſa marginata Fig. 1. Tab. V.

Habitat in Inſula Bourbon.

Deſcriptio.

Stipes palmaris, compreſſiuſculus, glaber, nudus. *Frons* ſpithamaea, bipinnata, erecta, glabra. *Rhachis* frondis compreſſa, leuiter marginata, e baſibus pinnarum decurrentibus. *Pinnae* alternae, pollicares, erecto patentes, diſtichae, pinnatifidae: laciniis ſuboppoſitis, plano-conuexiuſculis, 2 vel 3 lineas longis, obtuſis, ſubcarnoſis; imis paulo maioribus, furcatis; ſuperioribus ſenſim minoribus. *Fructificationes* in margine interiori ſingulae. Laciniae prope apicem ſolitariae, *rima* ſubrotunda, concaua, ſcobe nigra ſerta.

2. CAENOPTERIS (rutaefolia) frondibus pinnatifidis: laciniis linearibus planis obtuſis. Fig. 2. Tab. VI.

Habitat in Cap. bonae ſpei.

Deſcriptio.

Stipes teres, glaber. *Frons* pedalis, duplicato-pinnatifida, glabra flaccida. *Pinnae* inferiores breuiores, ſub

oppoſitae, remotae, petiolatae: pinnulis imis alternis, ſubpetiolatis, cuneiformibus, inciſis; ſuperiores pinnae oppoſitae ſ. alternae, proximiores: pinnulis imis pinnatifidis, reliquis ſimplicibus: foliolis ſ. laciniis linearibus, compreſſo planis, obtuſis, ſubcarnoſis, ſimplicibus, bifidis vel pinnatifidis, vix ſemiunguicularibus, diſtiche patentibus, glabris, ſubaequalibus. *Fructificationes* ſparſae, rima marginali oblonga, concaua, in margine interiori folioli ſita, ſcobem paruam fouente.

Tab. VII. 3. CAENOPTERIS (viuipara) frondibus tripinnatis laciniis ſubulatis, erectis. Fig. 3.

Acroſticum (viuiparum) frondibus viuiparis bipinnatis: pinnis binatis unilateralibus: pinnulis pinnatifidis furcatis ſubulatis, margine interiore fructificantibus. *Linn. ſuppl.* 444. *

Habitat in inſulis Mauritii et Bourbon.

Deſcriptio.

Stipes palmaris vel ſupra, ſulcatus, glaber, nudus. *Frons* ouato-oblonga, erecta, ſpithamaea, glabra, pinnata: pinnis bipinnatis: laciniis ſ. foliolis ſubulatis, acutis. Inferiores pinnae binatae, vnilaterales, ſurſum ſecundae; ſuperiores ſuboppoſitae, patentes. *Fructificationes* ſparſae, in ſingula lacinia frondis ſingulae ſolitariae, conſtantes e rima marginali, in medio laciniae antrorſum ſita, oblonga, concaua, ore integerrimo, e quo emergit ſcobs parua. *Propagines* in ſummitate frondis ſolitariae ſ. binatae, ſparſae, cuneiformes, obtuſae, retuſae, vtrinque planae, ſemiunguiculares, patentes.

MAL-

MALVACEI ORDINIS
PLANTAE NOVAE HYBRIDAE.

Auctore

J. T. KOELREVTER.

Specioſa, quae in hoc ordine ſaepe occurrit, plantarum facies, florumque peramoenus color atque excellens magnitudo, ſtructuraque ipſorum, ad experimenta in eis capienda maxime idonea, qua mediante caſtratione laborioſa non raro ſuperſedere plane poſſumus, me ita inuitarunt, vt plures eiusmodi hybridas tentauerim copulas, quam euentus earum ſaepiſſime fruſtraneus alias mihi ſuaſiſſet. Maximus ſane harum eſt numerus, illarum vero, quae optatum habuerunt ſucceſſum, exempla ſat pauca. Vtrasque cum beneuolo lectore in ſequenti Catalogo communicabo.

EXP. I.

Lavat. *triloba* ♀.
Lavat. *olbia* ♂.
An. 1765. d. 16 et 17. Iul. Flor. 3.
it. An. 1772. d. 17. Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. II.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1766, 1769 et 1773 inde procreatae plures, mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis ac formae, ſtaturae autem praeualentis valdeque luxurioſae. Folia tactu non ita ſericea, aſt crenis notabilioribus, lobisque minus profundis inſtructa, quam ♂; e contrario autem non adeo mollia et inſigniter crenata, quam ♀; lobus intermedius, more ♂, lateralibus multo longior, cum in ♀ inter ſe inuicem fere aequales ſint, foliumque circumſcriptione ſubrotundum efforment. Foecunditas, plantarum naturalium reſpectu, maxime quidem imminuta, ſed non penitus extincta; id quod Exp. III. ſatis probatum eſt.

EXP. II.

Lavat. *olbia* ♀.
Lavat. *triloba* ♂.
An. 1768. d. 16. Iul. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. I.

Deſcriptio.

Plantae, anno ſequenti inde productae plures, iis inuerſi experimenti omnino ſimiles erant.

EXP. III.

Lavat. { *triloba* ♀.
{ *olbia* ♂.
Propr. pulu. conſp.
An. 1767. Flor. plur.

Deſcriptio

Plantae nonnullae, anno ſequenti inde procreatae, matri rurſus ſimiliores mihi viſae ſunt, quam patri.

EXP. IV.

EXP. IV.

Lauat. *triloba* ♀.

olbia. ♂.

Sem. ann. 1772 *ſponte nata.*

Deſcriptio.

Plantarum, anno ſequenti inde prognatarum, quaedam ad matris, aliae etiam ad patris imaginem conformatae magis, quam ſub ipſarum priori ſtatu hybrido.

EXP. V.

Lavat. *thuring.* ♀.

Lavat. *triloba* ♂.

An. 1772. d. 13 Aug. Flos. 1.

Vid. Exp. inuerſ. VI.

Deſcriptio.

Ex ſeminibus, anno ſequenti in fimetum ſatis, progerminauerant plantae quinque, quarum vna, ſub dio culta, iam ſub finem menſis Sept. eiusdem anni, reliquae autem in ollis, anno 1774, demum floruere: mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis, nec minoris foecunditatis, quam iſtae Exp. 1.

EXP. VI.

Lavat. *triloba* ♀.

Lavat. *thuring.* ♂.

An. 1772. d. 16 Aug. Flos. 1.

Vid. Exp. inuerſ. V.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1773, mihi prognatae plures, ſub finem menſis Sept. maxima ex parte iam florebant, iis Exp. inuerſi ſimillimae.

EXP. VII.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
triloba ♂. }

Lavat. *triloba.* ♂.

An. 1773. d. 16 Aug. Flor. 9.

Deſcriptio.

Capſulae matris ☿. partim vacuae penitus, partim duobus tribusue ſeminibus bonis dotatae. Plantae nonnullae, anno 1774 inde prognatae, patri, Lav. trilobae, iam multo ſimiliores, quam antea.

EXP. VIII.

Lavat. *thuring.* ♀.
triloba ♂.

Sem. an. 1773. *Sponte nata.*

Deſcriptio.

Plantae, hinc an. 1774 enatae (quarum nonnullae iam Iulio menſe floruere) tam ratione florum, quam foliorum reſpectu, cum Lav. triloba quam maxime conueniebant.

EXP. IX.

Lavat. *thuring.* ♀.

Lavat. *olbia.* ♂.

An. 1772. d. 14 Aug. Flor. 2.

Deſcriptio.

Plantae in univerſum mediae inter ♀ et ♂ ſimilitudinis, earundemque qualitatum, vt caeterae huius generis plantae hybridae.

EXP.

EXP. X.

Malv. *ſylveſtris* ♀.

fl. alb.

Malv. *mauritan.* ♂.

fl. carmeſ.

An. 1765. d. 19 Aug. Flor. 2.

Vid. Exp. inverſ. XI.

Deſcriptio.

Plantae ann. 1766. inde procreatae flores dabant pallide carmeſinos, ac incorrupta foecunditate praeditos; hinc alteram iſtius meram eſſe varietatem, recte iudico.

EXP. XI.

Malv. *mauritan.* ♀.

fl. carmeſ.

Malv. *ſylveſtr.* ♂.

fl. alb.

An. 1773. d. 8 Iul. Flor. 4.

Vid. Exp. inuerſ. X.

Deſcriptio.

Varietas hybrida priori Exp. X. ſimillima.

EXP. XII.

Malv. *capenſ.* ♀.

ſcabroſ. γ.

Malv. *capenſ.* β. ♂.

An. 1766. d. 13. Aug. Flor. 2.

Deſcriptio.

Foecunditas plantarum inde enatarum haud imminuta differentiam vere ſpecificam non admittit, licet ipſae mediae inter ♀ et ♂ de caetero fuerint conformationis.

EXP.

EXP. XIII.

Alcea *ficifol.* ♀.
fl. carmeſ.
Alcea *rotundif.* ♂.
An. 1764. d. 2. Sept. Flor. 3. *α.* cum ♂ fl. profunde ſanguineo.
it. An. 1772. d. 27 Aug. Flos 1. *β.* cum ♂. fl. multipl. atro-purpureo.
it. An. 1772. d. 27 Aug. Floſ. 1. *γ.* cum ♂. fl. multipl. ſulphureo.
Vid. Exp. inuerſ. XIV.

Deſcriptio.

Floruit 1. ex *α*, anno 1765. d. 20 Sept. flore purpureo, ſimplici.

Floruit 1. ex *β*, anno 1773. Sub finem Sept. flore duplici, profunde purpureo.

Floruit 1. ex *γ*. anno 1773. ſub finem Septembr. flore ſimplici, pallide ſulphureo, it. 1. ex ead. d. 21 Iun. 1774. flore duplici, pallide ſulphureo: Folia inter vtramque mediam ſeruabant loborum proportionem, ac omnes, vti mihi quidem videbatur, aeque foecundae erant, ac ipſarum parentes; hinc ♂ a ♀ vix ſufficienter diſtinctam eſſe, iam olim Cel. Linnaeus in Spec. Pl. p. 967. recte ſtatuit.

EXP. XIV.

Alcea *rotundif.* ♀.
fl. alb.
Alcea *ficifol.* ♂.
fl. carmeſ.

An.

An. 1765. d. 18 Iul. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. XIII.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1766. inde procreatae, eiusdem plane habitus cum iis Exp. inuerſi. Floruit anno 1767, menſe Iulio earum 1. flor. multipl. purpur. it. 1. fl. ſimpl. ex carneo-albicante, it. 1. flor. multipl. carnei coloris.

EXP. XV.
Althaea *officin.* β. ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1774. d. 29 Iul. et ſeq. Flor. 6.
Vid. Exp. inuerſ. XVI.

Deſcriptio.

Capſulae ♀, ex hac copula ortae, omnes bonae notae, ſeminibusque perfectis erant repletae; plantulae etiam anno 1775, inde propullulabant, ſed, cum caſu aliquo improuiſo nimis cito deperierint, de earum natura certi aliquid in medium proferre nequeo.

EXP. XVI.
Althaea *cannab.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 29 Iul. et ſeq. Flor. 10.
Vid. Exp. inuerſ. XV.

Deſcriptio.

Capſulae ♀ eiusdem cum prioribus foecunditatis ac perfectionis; ſed eadem fata experta ſunt ſemina, iam terrae commiſſa.

COPVLATIONES LAVATERARVM, ALIARVMQVE MALVACEARVM, FRVSTRA HVCVSQVE TENTATAE.

Congeneres.

EXP. XVII.

Lauat. *arbor.* ♀.
Lauat. *trimeſtr.* ♂.
An. 1765. d. 8. Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. XXIII.
Conceptio nulla.

EXP. XVIII.

Lauat. *olbia.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 20 Iun. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. XIX.

Lauat. *trilob.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 22 Iul. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP. XX.

Lauat. *thuring.* ♀.
Lauat. *cret.* ♂.
An. 1773. d. 10 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXI.

Lauat. *triloba* ♀.
Lauat. *trimeſtr.* ♂.
An. 1765. d. 17 Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. XXV.
Conceptio nulla.

EXP. XXII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Lauat. *trimeſtr.* ♂.
An. 1762. d. 6 Sept. Flor. 2.

EXP. XXIII.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 5 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. XVII.
Conceptio nulla.

EXP. XXIV.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1768. d. 12 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXV.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Lauat. *triloba* ♂.
An. 1765. d. 8 Aug. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. XXI.
Conceptio nulla.

EXP. XVI.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *Althea.* ♂.

An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXVII.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *peruu.* ♂.

An. 1766. d. 8 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXVIII.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *carolin.* ♂.

An. 1766. d. 17 Aug. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XXIX.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *ſyluestr.* ♂.

An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. XXXI.

Conceptio nulla.

EXP. XXX.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *criſpa.* ♂.

An. 1766. d. 12 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXXI.

Malua *ſylueſtr.* ♀.
Malua *capenſ.* ♂.
ſcabr. γ.
An. 1765. d. 22 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. XXX.
Conceptio nulla.

EXP. XXXII.

Malua *ſylueſtr.* ♀.
Malua *verticill.* ♂.
An. 1765. d. 21 Aug. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP. XXXIII.

Malua *ſylueſtr.* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1766. 22 Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XXXIV.

Malua *Alcea.* ♀.
Malua *rotundif.* ♂.
An. 1768. d. 14 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXXV.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *aegypt.* ♂.
An. 1770. d. 7 Aug. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXP. XXXVI.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *carolin.* ♂.
An. 1766. d. 12 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXXVII.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *rotundif.* ♂.
An. 1766. d. 13 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XXXVIII.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.
Conceptio inanis,
vel adhuc dubia.

EXP. XXXIX.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *capenſ.* ♂.
ſcabr. γ.
An. 1766. d. 10 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XL.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *ſylueſtr.* ♂.
An. 1765. d. 4 Aug. Flor. 4.
Conceptio nullo.

EXP.

EXP. XLI.

Alcea *procumb.* ♀. (*a*)
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1773. d. 9. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XLII.

Alcea *procumb.* ♀.
Alcea *ficiſol.* ♂.
An. 1773. d. 7. Aug. et ſequent Floris.
Vid. Exp. inuerſ. XLIII.
Conceptio inanir, vel adhuc dubia.

EXP. XLIII.

Alcea *ficiſol.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1773. d. 9. Aug. Flor. 6.
Vid. Exp. inuerſ. XLII.
Conceptio inaris, vel adhuc dubia.

EXP. XLIV.

Napaea *dioica* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1765. d. 11. Aug. Flor. plur.
Conceptio nulla.

EXF. XLV.

Hibiſc. *paluſtr.* ♀.
Hibiſc. *ſyriac.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flor. 5.
Conceptio nulla.

EXP.

(*a*) Act. palat. Tom. III. p. 235. Tab, XVII.

EXP. XLVI.

Hibiſc. *ſyriac.* ♀.
Hibiſc. *pentacarp.* ♂.
An. 1774. d. 3. Sept. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. LXII.
Conceptio nulla.

EXP. XLVII.

Hibiſc. *ſyriac.* ♀.
Hibiſc. *Trion. α.* ♂.
An. 1774. d. 3. Sept. Flor. 6.
Vid. Exp. inuerſ. LXV.
Conceptio nulla.

EXP. XLVIII.

Hibiſc. *Ficuln.* ♀.
Hibiſc. *Manihot.* ♂.
An. 1765. d. 10. Sept Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XLIX.

Hibiſc. *Sabdar.* ♀.
Hibiſc. *Manihot.* ♂.
An. 1760. d. 20. Jan. Flor. 1.
item An. 1762. d. 13. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. L.

Hibiſc. *Sabdar.* ♀.
Hibiſc. *Ficuln.* ♂.
An. 1760 d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LI.

Hibiſc. *Sabdar.* ♀.

Hibiſc. *Trionum.* α. ♂.

An. 1760. d. 20. Jun. Flos 1.

It. An. 1762. d. 21. Aug. Flor. 2.

Vid. Exp. inuerſ. LXVII.

Conceptio nulla.

EXP. LII.

Hibiſc. *Manihot.* ♀.

Hibiſc. *eſculent.* ♂.

An. 1764. d. 17. Sept. Flor. 2.

Vid. Exp. inuerſ. LX.

Conceptio nulla.

EXP. LIII.

Hibiſc. *Manihot.* ♀.

Hibiſc. *Maluauiſc.* ♂.

An. 1764. d. 17. Sept. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LIV.

Hibiſc. *Manihot.* ♀. variet. fl. min. (*b*)

Hibiſc. *Sabdar.* ♂.

An. 1762. d. 25. Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP.

(*b*) Variet. foliis quinquepartitis, flore minore. In Libellis meis: Zweyte Fortſ. der vorläuf. Nachr. S. 124. und dritte Fortſetz. S. 114. haec eadem planta intelligenda, vbi ex errore pro vero Hibiſco *vitifolio* Linn. habebatur.

EXP. LV.

Hibiſc. *Manibot.* ♀. variet. fl. min.
Hibiſc. *paluſtr.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LVI.

Hibiſc. *Manibot.* ♀. variet. fl. min.
Hibiſc. *Trionum.* β. ♂.
An. 1762. d. 22. Jul. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. LXIX.
Conceptio nulla.

EXP. LVII.

Hibiſc. *Abelmoſch.* ♀.
Hibiſc *Manibot.* ♂.
An. 1766. d. 1. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LVIII.

Hibiſc. *Abelmoſch.* ♀.
Hibiſc. *paluſtr.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP LIX.

Hibiſc. *eſculentus.* ♀.
Hibiſc. *Maluauiſcus* ♂.
An. 1764. d. 17. Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LX.

Hibiſc. *eſculent.* ♀.
Hibiſc. *Manihot.* ♂.
An. 1762. d. 15 Aug. Flos 1.
it. An. 1764. d. 14 Sept. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. LII.
Conceptio nulla.

EXP. LXI.

Hibiſc. *eſculent.* ♀.
Hibiſc. *Trion.* β. ♂.
An. 1762. d. 22 Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LXII.

Hibiſc. *pentacarp.* ♀.
Hibiſc *ſyriac.* ♂.
An. 1774. d 4 Sept. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. LII.
Conceptio nulla.

EXP. LXIII.

Hibiſc. *pentacarp.* ♀.
Hibiſc. *Trionum* α. ♂.
An. 1774. d. 29 Aug. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. LXXI.
Conceptio nulla.

EXP. LXIV.

Hibiſc. *Trionum* α. ♀.
Hibiſc. *Maluauiſc.* ♂.
An. 1761. d. 16 Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXV.

Hibiſc. *Trionum* α. ♀.
Hibiſc. *ſyriac.* ♂.
An. 1774. d. 3 Sept. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. XLVII.
Conceptio nulla.

EXP. LXVI.

Hibiſc. *Trionum* α. ♀.
Hibiſc. *ficulneus* ♂.
An. 1760. d. 24 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXVII.

Hibiſc. *Trionum* α. ♀.
Hibiſc. *Sabdar.* ♂.
An. 1760. d. 20 Iun. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. LI.
Conceptio nulla.

EXP. LXVIII.

Hibiſc. *Trionum* α. ♀.
Hibiſc. *Manihot.* ♂.
An. 1762. d. 13 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LXIX.

Hibiſc. *Trionum* β. ♀.
Hibiſc. *Manihot.* ♂.
variet. fl. min.
An. 1762. d. 8 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. LI.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LXX.

Hibiſc. *Trionum a.* ♀.
Hibiſc. *Abelmoſch.* ♂.
An. 1760. d. 1 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXI.

Hibiſc. *Trionum a.* ♀.
Hibiſc. *pentacarp.* ♂.
An. 1774. d. 20 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. LXIII.

Bigeneres.

EXP. LXXII.

Lauat. *arborea* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1764. d. 3 Sept. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LXXIII.

Lauat. *arborea* ♀.
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1764. d. 2 Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXIV.

Lauat. *arborea* ♀.
Malua *ſylueſtr.* ♂.
An. 1765. d. 11 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LXXV.

Lauat. *arborea* ♀.

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 10 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXVI.

Lauat. *olbia.* ♀.

Alcea *roſea.* ♂.

An. 1765. d. 24 Iun. Flor. 2.

Conceptio nulla

EXP. LXXVII.

Lauat. *olbia.* ♀.

Malua *ſylueſtr* ♂.

An. 1765. d. 21 Iun. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXVIII.

Lauat. *olbia.*

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 25 Iul. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXIX.

Lauat. *triloba* ♀.

Althaea *officin.* ♂.

An. 1765. d. 28 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXX.

Lauat. *triloba* ♀.

Althaea *cannab.* ♂.

An. 1765. d. 3 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXI.

Lauat. *triloba* ♀.

Alcea *roſea.* ♂.

An. 1772. d. 27 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXII.

Lauat. *triloba* ♀

Alcea *ficifol.* ♂.

An 1765. d. 15 Iul. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. CXVII.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXIII.

Lauat. *triloba* ♀.

Alcea *procumb.* ♂.

An. 1773. d. 9 Aug. Flor. 4.

Vid. Exp. inuerſ. CXXIX.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXIV.

Lauat. *triloba* ♀.

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 22 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXV.

Lauat. *triloba* ♀.

Malua *Alcea.* ♂.

An. 1766. d. 22 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LXXXVI.

Lauat. *triloba* ♀.
Malua *moſchat.* ♂.
An. 1765. d. 23 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXVII.

Lauat. *triloob* ♀.
Malua *capenſ.* ♂.
ſcabr. γ.
An. 1766. d. 22 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXVIII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 31 Iul. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. CXXXII.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXIX.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *hirſuta* ♂.
An. 1773. d 15 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XC.

Lauat. *thuring.* ♀.
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1772. d. 25 Aug. et ſeq. Flor. 11.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XCI.

Lauat. *thuring.* ♀.

Alcea *ficifol.* ♂.

An. 1772. d. 17 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XCII.

Lauat. *thuring.* ♀.

Alcea *procumb.* ♂.

An. 1773. d. 13 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XCIII.

Lauat. *thuring.* ♀.

Malua *ſylueſtr.* ♂.

An. 1772. d. 1 Sept. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XCIV.

Lauat. *thuring.* ♀.

Malua *Alcea.* ♂.

An. 1773. d. 22 Iul. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXP. XCV.

Lauat. *cret.* ♀.

Malua *rotundif.* ♂.

An. 1771. d. 10 Aug. Flor. 6.

Conceptio nulla.

EXP. XCVI.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.

Althaea *officin.* ♂.

An. 1765. d. 10 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XCVII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1765. d. 8 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XCVIII.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1765. d. 7 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XCIX.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1773. d. 15 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. CXXVI.
Conceptio nulla.

EXP. C.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Malua *ſyluestr.* ♂.
An. 1760. d. 29 Iul. Flor. 2.
it. An. 1762. d. 31 Iul. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. CXI.
Conceptio nulla.

EXP. CI.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.
Malua *maurit.* ♂.
An. 1765. d. 10 Aug. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP. CII.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.

Malua *moſchat.* ♂.

An. 1765. d. 6 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CIII.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.

Malua *capenſ.* ♂.

An. 1768. d. 15 Iul. Flor. 1.

Conceptio nulla.

EXP. CIV.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Sida *Abutil.* ♂.

An. 1766. d. 19 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CV.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malachre *capit.* ♂.

An. 1766. d. 7 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CVI.

Malua *ſylueſtr.* ♀.

Lauat. *trimeſtr.* ♂.

An. 1765. d. 20 Aug. Flos. 1.

Vid. Exp. inuerſ. C.

Conceptio nulla.

EXP. CXII.

Malua *maurit.* ♀.
Althaea *hirſut.* ♂.
An. 1773. d. 4 Iul. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CVIII.

Malua *maurit.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1768. d. 10 Iul. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CIX.

Malua *Alcea.* ♀.
Lauat. *trimeſtr.* ♂.
An. 1768. d. 10 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CX.

Malua *moſchata* ♀.
Lauat. *arbor.* ♀.
An. 1765. d. 3 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXI.

Malua *moſchata* ♀.
Alcea *ficifol.* ♂.
An. 1765. d. 2 Aug. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. CXXII.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXII.

Malua *moſchat.* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1765. d. 2 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla

EXP. CXIII.

Alcea *roſea.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 4 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXIV.

Alcea *roſea.* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 3 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXV.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1764. d. 29 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXVI.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1764. d. 29 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXVII.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Lauat. *triloba* ♂.

An. 1765. d. 26 Iul. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. LXXXII.

Conceptio nulla.

EXP. CXVIII.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Lauat. *thuring.* ♂.

An. 1772. d. 17 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. XCI.

Conceptio nulla.

EXP. CXIX.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Lauat. *trimeſtr.* ♀.

An. 1764. d. 4 Sept. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CXX.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Malua *ſylueſtr.* ♂.

An. 1764. d. 28 Iul. Flos 1.
— 1765. d. 5 Aug. —— 1.
— 1772. d. 1 Sept. —— 1.

Conceptio nulla.

EXP. CXXI.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 28 Iul. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXXII.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Malua *moſchata* ♂.

An. 1764. d. 7 Sept. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. CXI.

Conceptio nulla.

EXP. CXXIII.

Alcea *ficiſol.* ♀.

Vrena *lobat.* ♂.

An. 1764. d. 4 Sept. Flos 1.

Conceptio nullo.

EXP. XXIV.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *triloba* ♂.

An. 1773. d. 4 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. LXXXIII.

Conceptio nulla.

EXP. CXXV.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *cret.* ♂.

An. 1773. d. 16 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CXXVI.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *trimeſtr.* ♂.

An. 1763. d. 9 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. XCIX.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXVCII.

Alcea *procumb.* ♀.
Malua *carolin.* ♂.
An. 1773. d. 24. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXVIII.

Alcea *procumb.* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1763. d. 9. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXIX.

Alcea *procumb.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1763. d. 21. Aug. Flos 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXX.

Alcea *procumb.* ♀.
Althaea *hirſut.* ♂.
An. 1773. d. 9 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXI.

Althaea *officin.* β. ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1774. d. 1 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXXXII.

Althaea *officin.* β. ♀.
Lavat. *thuring.* ♂.
An. 1760. d. 29. Iul. Flos 1.
—— 1774. d. 31. Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. LXXXVIII.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIII.

Althaea *officin.* β. ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 2. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIV.

Althaea *officin.* β. ♀.
Sida *ſpinoſa.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXV.

Althaea *cannab.* ♀.
Lavat. *olbia.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVI.

Althaea *cannab.* ♀.
Lavat. *thuring.* ♂.
An. 1774. d. 31. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVII.

Althaea *cannab.* ♀.
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVIII.

Althaea *cannab.* ♀.
Napaea *hermaphrod.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIX.

Althaea *cannab.* ♀.
Sida *ſpinoſa* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXL.

Hibiſc. *ficuln.* ♀.
Goſſyp. *herbac.* ♂.
An. 1760. d. 2. Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. CLVIII.
Conceptio nulla.

EXP. CXLI.

Hibiſc. *ſabdar.* ♀.
Malva *capenſ. α.* ♂.
An. 1760. d. 29. Jun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXLII.

Hibiſc. *Manihot.* ♀.
Lavat. *trilob.* ♂.
An. 1760. d. 28. Jun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIII.

Hibiſc. *Manihot.* ♀.
Sida *Abutilon.* ♂.
An. 1760. d. 3. Jul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIV.

Hibiſc. *Abelmoſch.* ♀.
Goſſyp. *herbac.* ♂.
An. 1760. d. 31. Jul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLV.

Hibiſc. *Trion. α.* ♀.
Lavat. *arbor.* ♂.
An. 1760. d. 2. Apr. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVI.

Hibiſc. *Trion. α.* ♀.
Malv. *capenſ. α.* ♂.
An. 1760. d. 29. Jun. et ſeq. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVII.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Malva *carolin.* ♂.
An. 1762. d. 29. Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVIII.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Malva *ſylveſtr.* ♂.
A. 1760. d. 27. Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIX.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Malva *criſpa* ♂.
An. 1760. d. 1. Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CL.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLI.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1774. d. 4. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CLII.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Sida *ſpinoſa.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CLIII.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Sida *criſtata.* ♂.
An. 1760. d. 30. Iun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLIV.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Malachra *capit.* ♂.
An. 1772. d. 30. Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLV.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 2. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CLVI.

Hibiſc. *Trion.* *α.* ♀.
Goſſyp. *herbae.* ♂.
An. 1759. d. 27. Aug. Flos 1.
—— 1760. d. 2. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLVII.

Hibiſc. *Trion. α.* ♀.
Pentapetes *phoenicea* ♂.
An. 1759. d. 27. Aug. Flos 1.
—— 1760. d. 30. Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLVIII.

Goſſyp. *herbac.* ♀.
Hibiſc. *ficuln.* ♂.
An. 1765. d. 3. Sept. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. CXL.
Conceptio nulla.

EXP. CLIX.

Goſſyp. *herbac.* ♀.
Pentapet. *phoenic.* ♂.
An. 1765. d. 3 Sept Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLX.

Vrena *lobat.* ♀.
Hibiſc. *Trion. α.* ♂.
An. 1774. d. 4. Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

Com-

Compoſitae.

EXP. CLVI.

Lavat. *thuring.* ♀.

Lavat. *trilob.* ♀. } ♂.
olbia. ♂ }

An. 1771. d. 24. Sept. Flor. 5.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXP. CLVII.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
trilob. ♂. }

Malv. *capenſ.* ♂.
Scabr. γ.

An. 1773. d. 20. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLVIII.

Lavat. *thuring.* ♀ } ♀.
triloba ♂. }

Alcea *procumb.* ♂.

An. 1773. d. 19. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLXIX.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
triloba ♂. }

Althaea *officin.* β. ♂.

An. 1773. d. 18. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XLXX.

Malv. *maurit.* ♀. } ♀.
ſylveſtr. ♂. }

Napaea *hermaphr.* ♂.

An. 1774. d. 4. Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. XLXXI.

Althaea *officin.* β. ♀.

Malv. *maurit.* ♀. } ♂.
ſylveſtr. ♂. }

An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XLXXII.

Hibiſc. *Trion.* α. ♀.

Malv. *maurit.* ♀. } ♂.
ſylveſtr. ♂. }

An. 1774. d. 4. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE
OCCVLTATIONIBVS QVIBVSDAM SINGVLARIBVS, SIVE STELLARVM FIXARVM A PLANETIS, SEV ETIAM PLANETARVM A SE INVICEM.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Inter phaenomena caeli vti rariora, ita attentione quoque praeprimis digna, referendae merito ſunt occultationes ſtellarum fixarum a Planetis, vel etiam intimiores iſti congreſſus binorum Planetarum inter ſe, quibus vnus eorum ab altero obtegitur. Quum igitur Annales ſiue veteris, ſeu recentioris Aſtronomiae, non niſi pauciſſima quaedam ſpecimina huiusmodi occultationum ſuppeditent, haud praeter rem eſſe exiſtimaui, vt potiores harum obſeruationum examini ſubiicerem. In aeſtimando autem pretio harum obſeruationum merito perpendendum eſt, ante inventa Horologia pendula et Teleſcopia, huius generis obſeruationes omnimoda exactitudine inſtitutas cenſeri non poſſe; quippe quum iudicium de huiusmodi occultationibus, quod in animaduerſione nudis oculis facta fundatur, non-

numquam multum a veritate abludere poſſit. In congreſſu enim Planetae cum ſtella intimiori, dum Planeta viuidiori apparet luce, fieri vtique poteſt, vt lumen ſtellae nudis oculis quaſi diſpareat, etiam ſi diſtantia inter Planetam & ſtellam plurium intercedat minutorum, haud ſecus ac ſtellae inferiorum ordinum, dum limbo Lunae lucido approximantur, nonnunquam ad diſtantiam vnius vel alterius minuti ab hoc Limbo penitus diſpareant per optima quoque Teleſcopia conſpectae. Tum vero haud raro obſeruationes antiquiori aeuo inſtitutae eo ex capite pro dubiis haberi merentur, quod tempus, quo inſtitutae fuerunt, non prorſus indubitata ratione ſit definitum. In hac igitur mea disquiſitione in id praeprimis intentus fui, vt examinarem, vtrum ſecundum Theorias Planetarum ſtabilitas, veriſimile videatur factam tunc temporis eſſe occultationem quandam ſtellae fixae a Planeta, vel etiam vnius Planetae ab altero, quando Annales Aſtronomici huiusmodi obſeruationem factam eſſe perhibent.

§. 2. Inter antiquiſſimas huius generis obſeruationes illa eſt, de qua *Ptolamaeus* in Libro Almageſti XI. Cap. 3. refert, quod anno poſt mortem Alexandri 83, die 18 Menſis, qui Aegyptiis Epiphi dicitur, Iouis ſtella matutina occultauerit Aſellum Auſtralem, hoc eſt illam in Conſtellatione Cancri ſtellam, quae a *Beyero* littera δ deſignatur. Tempus igitur huius obſeruationis ad aeram Iulianam reductum incidet in Annum ante Chriſtum natum 240, diem 3 Septemb. cum 14^{h}. Facile autem liquet nos heic de exacto numero horarum non magnopere eſſe ſollicitos; ſufficiet enim, ſi generatim demonſtrare valeamus, die ciuili 4 Septembris anno ante Chriſtum 240 horis matutinis

nis Planetam Iouis tam prope ad Aſellum Auſtralem acceſſiſſe, vt illam ſtellam plane oblegere viſus ſit. Inuenimus autem pro tempore aſſignato ex Tabulis Solaribus Cel. de la *Caille* Longitudinem Solis 5ˢ. 7°. 14′ et Logarithmum diſtantiae Solis a terra 9, 999264, diſtantia nimirum media Solis a terra ipſi vnitati aequata. Tumque ex Tabilis Cel. de la *Lande* pro motu Iouis, computauimus Longitudinem Iouis Heliocentricam 2ˢ. 28°. 8′. Latitudinem Heliocentricam Borealem 30′. 58″ et Logarithmum diſtantiae Iouis a Sole 0, 723170. Hinc computo ſubducto inuenitur Longitudo Geocentrica Iouis 3ˢ. 7°. 43′. circiter et Latitudo Geocentrica Borealis 28′. 36″. Iam quia Longitudo Aſelli Auſtralis ad Annum 1750 ineuntem ſtatuitur 4ˢ. 5°. 13′. 46″. et Latitudo Borealis 4′. 18″; ſi quantitas praeſſionis aequinoctiorum Annis 2000 ſtatuatur 28′. 9″, quippe quae quantitas praeceſſionis haud admodum ab obſeruationibus abludere videtur, erit pro annis 1990 elapſis praeceſſio 28°. 0′. 33″, hincque fiet pro epocha obſeruationis die 3 Septembris Anno 240 ante Nativ. C. Longitudo Aſelli Auſtralis 3ˢ. 7°. 14′ circiter, Latitudo autem iſtius ſtellae erit circiter 16′ Auſtralis.

§. 3. Ex his igitur nunc patet, primum quod Longitudinem binorum Aſtrorum attinet maiorem adeſſe differentiam, quam vt occultatio aſelli a Ioue reapſe locum habere potuerit, quippe quum iſta differentia Longitudinum 29′ abſoluatur. Vtcunque autem magna haec habeatur differentia, eius tamen ratio aliquo modo explicari poteſt primum ex ipſa incertitudine circa Theoriam Iouis, idque eo magis quod in determinando loco Iouis Heliocentrico, perturbationum a Saturno oriundarum nullam ha-

 bueri

buerimus rationem, quae tamen perturbationes ipſum locum Heliocentricum Iouis nonnunquam 10 Minutis primis mutare valent. Tum vero non raticendum eſt dari quosdam Arctores, qui hanc obſeruationem ad diem proxime praecedentem 2 ſcilicet Septemb. referunt, pro qua epocha inueni Longitudinem Iouis Geocentricam 3ˢ. 7°. 33′ circiter. Conf. *Lansbergii Theſaur. Obſeruat. Aſtronomic. p.* 163. Hoc autem facto differentia in Longitudine iam non amplius erit niſi 19′, cuiusmodi differentiae ratio pro obſeruatione adeo remota, vt iam monui, haud difficulter explicari poteſt. Verum cum differentia in Latitudine quae ex calculo inuenta eſt 45 circiter minutorum primorum longe alia eſt ratio. Licet enim de variatione pro Latitudine Stellae Aſelli Auſtralis ab anno 240 ante Nat. C. vsque ad annum 1750, minime certi eſſe queamus, id ſaltem vix in dubium vocari poteſt, quin Latitudo Stellae pro epocha obſeruationis commemorata fuerit auſtralis. At nullo modo fieri potuiſſe nobis perſuademus, vt Latitudo Iouis eodem tempore fuerit Auſtralis, quippe quum inde ſequeretur Longitudinem Nodi pro orbita Iouis, tempore obſeruato ſtatui debere ad minimum 2ˢ. 28°, qua Longitudine Nodi comparata cum illa, quae noſtro Seculo obtinet, concluderetur tempore 2000 Annorum non maior variatio in Longitudine Nodi Iouis quam 10°; quae igitur variatio, ſi aequabili procederet tenore, variatio annua non niſi 18″ ſtatui deberet, quae determinatio ab illis enormiter abludit concluſionibus, quae ſiue ex obſeruationibus ſeu Theoria praelucente fuerunt elicitae. Si nimirum Longitudo Stellae et Iouis Geocentrica ſupponatur fuiſſe 3ˢ. 7°. 14′, ob Longitudinem Solis 5ˢ. 7°. 14′ erit Elongatio Solis a Ioue e terra ſpectata 60° circiter; vnde colligitur differentia

rentia Longitudinum Iouis et Solis 69°. 24′. 45″, ideoque Longitudo Iouis Heliocentrica 2ˢ. 27°. 49′ ex quo omnino patet Longitudinem Nodi maiorem ſtatui debere, quam 2ˢ. 28°, vt ſcilicet Latitudo Iouis obtineatur Auſtralis.

§. 4. Quum igitur ſtella Cancri δ Eclipticae valde ſit vicina; obſeruatio allata magni ſane eſſet momenti, pro determinanda variatione in Longitudine Nodi Iouis, modo Latitudo Stellae δ pro tempore obſeruationis exacte haberetur cognita. Verum quia de variatione in Latitudine ſtellarum fixarum certum eſt eam inaequabili tenore augeri vel minui, tumque plane incognitum ſit, an non huic ſtellae motus quidam competat proprius, Latitudo Aſelli Auſtralis minime hic pro cognita aſſumi poteſt. Patet igitur argumenta, quae ex hac obſeruatione deducuntur, pro determinando motu Nodi Iouis vix ſibi rite conſtare poſſe. Sic dum Celeb. *Caſſini* in ſua Aſtronomia pag. 447 ex hac obſeruatione concluſit, motum annuum Longitudinis Nodi pro Ioue eſſe 25″ circiter, eo ex fundamento eius ratiocinium procedit, quod Latitudo ſtellae fixae pro Epocha modo dicta ſit 3′. 30″ Bor., quippe quum Celeb. *Maraldi* eam Anno 1706 obſeruaſſet 3′. 30″, tumque a Celeb. *Flamſtead* eadem Latitudo inuenta ſit 3′. 46″, cum tamen Catalogi antiquiores, vtpote ille a *Tychone* adornatus, Latitudinem huius ſtellae ſupponant 4′ Auſtralem. Vide *Tychonis Brahei Aſtronom. Inſtaur. Progymnasmata pag.* 182. Propter iſtam igitur rationem illuſtris hic Aſtronomus *Caſſini* iam concludere debuiſſet Latitudines ſtellarum fixarum minime pro inuariabilibus eſſe habendis. Ex eadem hac obſeruatione referente Cel. *de la Lande*; celebris Aſtronomus Pariſinus *le Gentil* motum Nodi Iouis

an-

annuum concluſit 10″, ſuppoſita ſine dubio ipſi ſtellae Latudine quadam Auſtrali, verum inſtituti noſtri ratio non fert, vt disquiramus, quanta praeciſe ſuppoſita ſit; quippe quum nobis quidem tota haec obſeruatio veritalis ſpeciem prae ſe ferre minime videatur. Caeterum etiamſi Latitudo iſta Stellae δ in Cancro perfecte haberetur determinata, inde quidem motus Nodi Iouis pro ſingulis ſeculis non haberetur determinatus, quippe quia is motus interuallo 2000 annorum minime ſtatui poteſt aequabilis; interim ſi iſte motus pro ſeculo fluente ſiue ex Theoria ſeu etiam per obſeruationis haberetur cognitus, ſi variatio integra pro 2000 annis elapſis per obſeruationes innoteſceret, inde quoque iudicium formari poſſet, quas variationes ſubeat motus iſte, quo Nodus Iouis procedit.

§. 5. Ex antiquiſſimis circa Planetam Martem factis obſeruationibus, praecipuo loco habetur illa, qua Anno Nabonaſſari 476 die 20 Menſis Athyr Stella Martis videbatur adpoſita boreali in fronte Scorpii, quae Stella apud *Bayerum* littera δ deſignatur. *Ptolemaeus* Libro Almageſti X Cap. 9. Quamuis autem heic de totali occultatione ſtellae a Planeta non quaeſtio ſit, ſed de intimiori ſolum eorum congreſſu, operae tamen pretium erit, vt disquiramus, quam prope haec obſeruatio cum calculo conveniat. Ipſum igitur tempus obſeruationis ad aeram Iulianam reductum incidit in Annum ante C. N. 271, diemque 17 Ianuarii cum 18^h, quo tempore ex Tabulis Solaribus de la *Caille* habetur Longitudo Solis 9^s. 24°. 39′ et Logar. diſtantiae Solis a terra 9,995486; ex Tabulis vero Solaribus *Mayeri*, Longitudo Solis 9^s. 24°. 30′ et Logarithmus diſtantiae 9,995500. Tum vero eſt ex Tabulis

Cel.

Cel. de la *Lande* pro Marte, Longitudo Martis Heliocentrica 5ˢ. 23°. 48′. 33″; Logar. diſtantiae Martis a Sole 0, 199826, exiſtente Latitudine eius Heliocentrica 58′. 4″ B. Ex Tabulis autem *Halleii* haec Elementa ita determinantur, vt ſit Longitudo Martis Heliocent. 5ˢ. 23°. 39′. 11″; Latitudo 1°. 0′. 25″ et Logar. diſtantiae 0, 198834. Si igitur locus Martis ex Tabulis Cel. de la *Lande* conferatur cum loco Solis ex Tabulis de la *Caille*; computabitur Longitudo Martis Geocentrica 7ˢ. 2°. 5′. 2″ et Latitudo Geocentrica 1°. 1′. 35″ B. Sin autem locus Solis ex Tabulis *Mayeri* depromtus hic in vſum vocetur, Longitudo Geocentrica 50″ diminuetur, quae diminutio hoc in negotio quidquam ad rem facere non cenſenda eſt. Denique ſi combinetur Longitudo Martis ex Tabulis *Halleii* computata, cum Longitudine Solis ex Tabulis *Mayeri* inventa, fit Longitudo Geocentrica Martis 7ˢ. 2°. 1′. 24″, adeoque ab illa ſupra inuenta parum diſcrepans. Quia nunc Longitudo β Scorpii ad Annum 1750, ſit 7ˢ. 29°. 42′. 2″ et Latitudo eius Borealis 1°. 2′. 24″, ſi praeceſſio aequinoctiorum ita aeſtimetur ac ſupra §. 2. fecimus, fiet Longitudo β Sorpii pro anno 271 ante C. N. 7ˢ. 1°. 15′ circiter, Latitudo vero huius Stellae erit 1°. 31′ Borealis.

§. 6. Quamuis nunc diſcrimen inter Longitudines Planetae et Stellae ex Tabulis concluſum ſatis ſit ſenſibile, 50 nimirum minutorum primorum, huius tamen diſcrepantiae ratio explicari poteſt, vel ex leuiuſculis quibusdam correctionibus pro ipſa Theoria Martis locum habentibus, quae vtcunque paruae ſint, interuallo tamen 2000 annorum ſatis ſenſibiles producere poſſent effectus, vel etiam ex correctione quadam pro loco Stellae, ſi nimirum iſti

 Stellae

Stellae motus quidam propius tribuendus eſſet, quod quidem probabile videri poſſet, ſiquidem Cel. *Caſſini* in ſua Aſtronomia pag. 466 perhibeat Ptolemaeum locum huius Stellae ad $2^{\circ}. 15'$ in ſigno Scorpii referre. Verum tamen re rite perpenſa huic aeſtimationi a Ptolemaeo adhibitae, nulla tribui poteſt fides; cum enim ſua aetate inuenerat Longitudinem β Scopii $7^{s}. 6^{\circ}. 20'$, praeceſſionem aequinoctiorum pro ſingulis annis centenis aeſtimando vnius gradus, inde concluſit tempore obſeruationis fuiſſe Longitudinem β Scorpii $7^{s}. 2^{\circ}. 15'$. Verum nec iſta aeſtimatio pro Longitudine β Scorpii pro aetate Ptolemaei admodum veriſimilis videtur, et ſi rite ſibi conſtaret, quia praeceſſio aequinoctiorum omnino quarta parte ſuperat illam Ptolemaei aeſtimationem, Longitudo β Scorpii pro tempore obſervationis nequidem ad $7^{s}. 1^{\circ}$. exſurgeret. Caeterum neque heic reticendum eſt, Illuſtrem Aſtronomum *Keplerum* ita ſibi perſuaſiſſe Ptolemaeum in referenda hac obſeruatione in errorem fuiſſe inductum, atque per Borealem in fronte Scorpii non intelligendam eſſe Stellam β, ſed Stellam ν, quae omnino iſta Stella β eſt Borealior. Verum tamen loco Stellae ν pro Epocha noſtra computato, neque ille locus cum inuenta Longitudine Martis omnino conſentit, et pro Latitudine iam multo maior adeſt diſcrepantia ac pro Stella β. Scilicet quia Longitudo Stellae ν ad Annum 1750 aeſtimatur $8^{s}. 1^{\circ}. 2'. 16''$, erit pro tempore obſeruationis Longitudo ν Scorpii $7^{s}. 2^{\circ}. 35'$; Latitudo autem inuenietur $2^{\circ}. 7'$. Bor. ita vt iam inter ν Scorpii et Planetam Martis intercedat pro Latitudine differentia vnius circiter gradus. Si denique ſupponamus per diem 20 menſis Athyr heic intelligendum eſſe diem praecedentem illi, quem nos adhibuimus, ita vt tempus obſeruationis

nis ſit An. 271 ante N. C. 16 Ianuar. 18^h, erit pro iſto tempore Longitudo Martis Geocentrica $7^s. 1^\circ. 31'$ circiter et Latitudo $1^\circ. 7'$, vnde nunc quidem melior conſenſus calculi cum obſeruatione prodit; verum teſtimonio Auctorum Aſtronomicorum nos deſtituente, hoc tantum coniecturae loco proponimus.

§. 7. Antiquiſſima obſeruatio pro Planeta Veneris inſtituta, illa eſt, qua Timochares Alexandriae obſeruauit Planetam Veneris Anno a Nabonaſſare 476, 17 die Menſis Meſori, horis a Meridie 17, obtexiſſe praecedentem ſtellarum quatuor in Auſtrina ala Virginis, hoc eſt illam Stellam, quam *Bayerus* littera η deſignat. Tempus igitur huius obſeruationis ad aeram Iulianam reductum incidet in Annum ante N. C. 271, diem 11 Octobr. 17^h; pro quo tempore habetur ex Tabulis de la *Caille* Longitudo Solis $6^s. 14^\circ. 51'$ et Logar. diſtantiae Solis a terra 9, 994933. Tum vero ex Tabulis Cel. de la *Lande* pro Venere, habetur Longitudo Heliocentrica huius Planetae. $2^s. 27^\circ. 54'$, Latitudo Bor. $1^\circ. 44'. 20''$ et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856904; ex Tabulis autem *Halleii* Longitudo Veneris Helioc. $2^s. 27^\circ. 24'$; Latitudo $1^\circ. 43'. 0''$. Bor. et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856130. Hinc calculo ſubducto, ex priori pro Venere determinatione inueni Longitudinem Veneris Geocentricam $5^s. 3^\circ. 33'$ et Latitudinem $1^\circ. 12'. 10''$. B.; ex poſteriori autem concluſi Longitudinem Veneris Geocentricam $5^s. 3^\circ. 18'$ et Latitudinem $1^\circ. 11'. 40''$. Ex calculo autem Cel. *Caſſini* ſecundum eius Tabulas erit Longitudo Veneris Geocentrica $5^s. 3^\circ. 26'$. (Vide Aſtronomiam *Caſſini* pag. 576.). Iam autem quia ad ineuntem Annum 1750 eſt Longitudo η Virginis

6ˢ. 1°. 20′. 36″ et Latitudo 1°. 22′. 31″ Bor.; habita ratione praeceſſionis aequinoctiorum et reliquarum variationum pro locis Stellarum, fiet pro Epocha obſeruationis Longitudo ſtellae 5ˢ. 2°. 55′ circiter, et Latitudo 1°. 29′ Bor. Hinc igitur nunc patet reſpectu Longitudinis Stellae et Planetae, inter calculum et obſeruationem maiorem non adeſſe diſſenſum, quam vt vel leui adhibita correctione pro Theoria Veneris, vel etiam ex errore, qui in determinando loco ſtellae pro tempore obſeruationis commiſſus eſt, huius diſcrepantiae ratio reddi queat. Quumque Longitudo Veneris Geocentrica interuallo 24 horarum 1°. 10′ immutetur, ſi nonnullis tantum horis tempus obſeruationis anteuertere ſupponatur illud, quod a nobis adhibitum eſt, inde quoque ipſa Longitudo Veneris ſenſibili ratione diminuetur. Sic ſi obſeruatio facta ſupponatur hora 14 Pariſina, erit Longitudo Veneris Geocentrica ex prima determinatione 5ˢ. 3°. 14′ et ex poſteriori 5ˢ. 3°. 9′; immo quia in noſtro calculo rationem differentiae meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et Alexandriam non habuimus, ſi ipſa obſeruatio facta ſupponatur Alexandriae hora 4ᵗᵃ matutina, quae in horam 2ᵈᵃᵐ Pariſiis incidit, tum binae hae vltimae concluſiones pro Longitudine Veneris adhiberi deberent. In nonnullis quidem editionibus Almageſti affirmatur hanc obſeruationem in ipſam mediam noctem incidere; verum ex data declinatione Veneris pro eo tempore cum Elongatione eius a Sole facile probatur Venerem d. 11 Octobr. anni commemorati, ante horam 3ᵗⁱᵃᵐ vel 4ᵗᵃᵐ matutinam Alexandriae exoriri non potuiſſe. Caeterum quia tempore Ptolemaei Longitudo ſtellae η ſupponitur 5ˢ. 8°. 15′, ſi iſta determinatio Ptolemaei rite ſibi conſtaret, fieret Longitudo huius Stellae pro Epocha obſerua-

ſeruationis 5ˢ. 2°. 30′, praeterlapſis enim 408 annis a primo anno Antonini ad tempus obſeruationis, habetur praeceſſio aequinoctiorum 5°. 45′ circiter.

§. 8. Differentia in Latitudine inter Stellam et Venerem iuſto quidem maior eſt, quam vt vlla occultatio ſtellae a Venere locum habere potuerit. Refert quidem Ptolemaeus Latitudinem huius Stellae fuiſſe ſua aetate 1°. 10′. vnde omnino egregius conſenſus Latitudinis Stellae cum illa Veneris prodiret. Verum ex regulis, quae praeſcribuntur pro determinanda variatione in Latitudine fixarum, colligitur hanc variationem pro η Virginis eſſe negatiuam, tumque praeterea in Catalogo *Tychonis* Latitudo huius ſtellae ad annum 1600 ponitur 1°. 25′ ideoque maior illa, quae pro Anno 1750 obtinet. Niſi igitur haec ſtella motu quodam proprio gaudeat admodum ſenſibili, quae integro ſeculo 45″ abſoluatur, Latitudo Stellae cum illa Veneris nequaquam reddi poteſt conſentiens. Si vero ſupponatur Latitudinem Stellae reapſe fuiſſe 1°. 29′, non omnino veriſimile eſt, vt locus Nodi pro Venere tam inſignem admittat correctionem, vt Latitudo Veneris cum illa pro Stella omnimode conſentiens reddatur. Ex Latitudine enim Veneris Geocentrica 1°. 29′ pro tempore obſeruato, concluditur Latitudo Heliocentrica 2°. 8′. 40″, cui Latitudini, quum argumentum Latitudinis 1ˢ. 9°. 16′ reſpondeat, relinquitur Longitudo Nodi 1ˢ. 18′. 34″ quae plusquam 8° ab illa ex Tabulis elicita differt. Et ſi iſta Longitudo Nodi conferatur cum illa, quae pro noſtro ſeculo valet, fieret motus annuus pro Longitudine Nodi 45″, quae et Theoria et obſeruationibus renitentibus admitti nequit. Sin autem cum Cel. *Caſſini* ſupponamus fuiſſe

 Latitu-

Latitudinem η Virginis 1°. 22′, colligetur inde Latitudo Veneris Heliocentrica 1°. 58′. 30″, cui Latitudini cum argumentum Latitudinis 1ˢ. 5°. 40′ reſpondeat, inde colligetur Longitudo Nodi Veneris 1ˢ. 22°. 10′ et motus annus pro Longitudine Nodi 40″ circiter, qui certe adhuc nimis eſt magnus. Cum vero Celeb. *Caſſini* hunc motum non niſi 36″ inueniſſet (Aſtrom. *Caſſini* p. 576.) ratio diſcrepantiae in eo eſt ſita, quod per inaduertentiam Celeb. hic Aſtronomus ibi huiusmodi adhibuerit analogiam ſin. STV: ſin. TVS = SV : TS, loco verae ſin. STV: ſin. VST = SV: TV, eſt enim Tang. Latit. Heliocentricae ad Tangentem Latitudinis Geocentricae in ratione TV: SV = ſin. VST: ſin. STV. Quia igitur prorſus in dubio relinquimur de vera Latitudine ſtellae η pro tempore obſeruationis, patet omnino ex hac obſeruatione nihil de motu Nodi pro Venere concludi poſſe, quamuis caeteroquin haec obſeruatio pro hoc inſtituto ſatis eſſet accommodata, ſi nimirum ex Latitudine Stellae cognita, Latitudinem Veneris inferre liceret. Denique hoc loco praetermittere non poſſum, quin obſeruem, Cel. de la *Lande*, dum hanc obſeruationem pag. 167. 168. Tom. II. Aſtronomiae recenſet, animaduertiſſe, quod iſthaec obſeruatio plusquam quatuor gradibus a calculo differat, qualis certe diſcrepantia a reliquis Aſtronomis, qui hanc obſeruationem calculo ſubduxerunt, nequaquam fuit animaduerſa. Tum vero nec rite ſibi conſtat, quod dicit Celeb. Aſtronomus obſeruatam fuiſſe Longitudinem Veneris 5ˢ. 3°. 36′, nam iſta Longitudo minime conſentit cum illa pro η Virginis, quae nimirum inuenta eſt 5ˢ. 2°. 55′, hic igitur Cel. de la *Lande* Longitudinem Veneris obſeruatam, cum illa ex calculo deducta confundiſſe videtur.

§. 9.

§. 9. Inter antiquas Planetarum obſeruationes, ſingularem quoque meretur attentionem illa, cuius mentionem facit *Bullaldus* in Aſtronomia Philolaica ex antiquo Codice manuſcripto in Bibliotheca Regia Pariſienſi, vbi dicitur Anno Diocletiani 214, die 6 Pachon, hora noctis ſecunda Stellam Martis ita iunctam fuiſſe Stellae Iouis, vt nullo quaſi interuallo a ſe inuicem diſtarent. Tempus igitur huius obſeruationis erit Anno poſt Nat. C. 498, die 1 Maii hora 7. ad Meridianum Pariſinum, pro quo tempore Tabulae Solares de la *Caille* praebent Longitudinem Solis $1^s. 11^\circ. 54'$ et Logarithmum diſtantiae Solis a Terra 0, 006044. Tum vero ex Tabulis Cel. *de la Lande* deduxi Longitudinem Martis Heliocentricam $6^s. 7^\circ. 40'$; Latitudinem $47'. 4''$ Bor. et Logarithmum diſtantiae Martis a Sole 0, 200138; Longitudinem autem Iouis $5^s. 10^\circ. 36'$; Latitudinem eius $1^\circ. 18'. 37''$ Bor., et Logarithmum diſtantiae Iouis a Sole 0,736343. Denique ex Tabulis *Halleii* haec Elementa ita determinantur, vt ſit Longitudo Martis Heliocentrica $6^s. 7^\circ. 31'$; Latitudo eius $50'. 34''$ Bor. et Logarithmus diſtantiae 0, 198914. Pro Ioue autem reperietur Longitudo Heliocentrica $5^s. 10^\circ. 22''$; Latitudo Bor. $1^s. 17'. 49''$ et Logarithmus diſtantiae 0, 736 330. Ex priori harum determinationum fit Longitudo Martis Geocentica $5^s. 0^\circ. 18'$, exiſtente Latitudine $1^\circ. 19'. 22''$ Bor.; Iouis autem Longitudo Geocentrica $5^s. 0^\circ. 26'$ et Latitudo $1^\circ. 25'. 0''$ Bor., ita vt ſecundum has concluſiones differentia in Longitudine non niſi $8'$ abſoluatur, differentia vero in Latitudine ne quidem $6'$ excedat, vnde hos Planetas nudis oculis intuenti, omnino ſibi proximi et quaſi iuncti non potuerint non videri. Ex poſteriori autem determinatione fit Longitudo Martis Geocentrica $4^s. 29^\circ. 57'$ eiusque Latitudo

$1^\circ.$

1°. 25′. 30″ Bor.; Iouis autem erit Longitudo Geocentrica $5^s. 0°. 12'$ et Lat. 1°. 24′. 4″ Bor. Secundum hanc poſteriorem determinationem nunc differentia in Longitudine maior aliquanto euadit, quam in priori iſta, tum vero viciſſim differentia in Latitudine nunc fere euaneſcit. Ex Tabulis autem Celeb. *Caſſini* maiores adhuc diſcrepantiae inter Longitudines et Latitudines horum Planetarum ſe produnt, vti ipſemet illuſtris hic Aſtronomus calculo inſtituto inuenit, (Conf. Aſtronom. *Caſſini* p. 502. 504). Si cui parum credibile videatur, quod quum determinationes pro Longitudine Heliocentrica Martis non niſi 9 minutis differant, tamen differentia pro Longitudine Geocentrica oriatur plusquam duplo maior; perpendendum ipſi eſt obſeruationem eo factam eſſe tempore, quo Elongatio Martis a Sole e terra viſa, ad angulum 90° propius accederet; vnde ex paruula mutatione loci Heliocentrici, locus Geocentricus valde magnam ſubire cenſendus eſt.

§. 10. Miſſis igitur antiquis obſeruationibus occultationum, ex quibus vix quidquam certi concludi poteſt pro perficienda Theoria Planetarum, nunc ad illas quidem procedamus obſeruationes, quae ſequiori aeuo, vtpote ad finem vergente ſeculo decimo ſexto et binis inſequentibus factae ſunt. Harum in numero prima illa eſt, qua Anno aerae Iulianae 1574 die 16 Septembris hora 4ᵗᵃ matutina, *Maeſtlinus* Tubingae obſeruauit Stellam Cor Leonis dictam a Planeta Veneris plane fuiſſe obtectam, vti refert *Keplerus* in Aſtronomia Optica pag. 305. Pro hoc tempore habetur locus Solis $6^s. 2°. 32'$ et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 0,000249; tumque, ex Tabulis Cel. de la *Lande* Longitudo Veneris Heliocentrica $2^s. 24°. 4'$, Latitudo

tudo cuius Borealis 39′. 19″ et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856843. Ex Tabulis vero *Halleianis* habetur Longitudo Veneris Heliocentrica 2ˢ. 24°. 4′, Latitudo Borealis 39′. 25″ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 857017. Hinc igitur fit pro tempore obſeruato Longitudo Veneris Geocentrica 4ˢ. 24°. 3′ circiter cum Latitudine 24′. 43″ B. ſecundum Tabulis Cel. *de la Lande*, at ex Tabulis *Halleianis* habetur Longitudo Geocentrica Veneris 4ˢ. 24°. 2′, exiſtente Latitudine 24′. 49″ B., ita vt Tabulae pro hoc momento ſatis bene inter ſe conſentiant. Ex ſuppoſita autem Longitudine Reguli pro Anno 1750 4ˢ. 26°. 21′. 12″ et Latitudine 27′. 33″, fiet pro tempore obſeruationis Longitudo Reguli 4ˢ. 23°. 54′ et Latitudo 26′. 33″, vnde quidem concludere licet hanc ſtellam tempore citato a Venere non fuiſſe coopertam, quum vix ſupponere fas ſit Tabulas pro motu Veneris integris octo minutis a veritate abludere. Quoniam autem intimior hic erat congreſſus ſtellae cum Planeta, fieri facile potuit, vt exigua, quae inter haec Aſtra ſe obtulit diſtantia, nudis non percipi potuerit oculis.

§. 11. Deinde quia pro 16 Sept. Anno 1574 16ʰ, eſt Longitudo Solis 6ˢ. 3°. 31′, Logarithm diſtantiae Solis a terra 0, 000120, Longitudo Veneris Heliocentrica 2ˢ. 25°. 41′ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 856784, fiet Longitudo Veneris Geocentrica 4ˢ. 25°. 13′ et Latitudo 28′. 8″ B. Et quum motus Geocentricus pro Venere 1°. 10′ abſoluatur, vera coniunctio Veneris cum Regulo incidet in 15 Septemb. hor. 13, quo tempore eſt Longitudo Veneris Geocentrica 4ˢ. 23°. 54′ circiter, Latitudo autem Geocentrica 24′. 19″, quae nunc

quidem talis eſt, vt non veriſimile videatur Regulum a Venere penitus fuiſſe obtectum. Pro tempore enim allato diſtantia Veneris a terra quum fuerit 1, 1457 eiusmodi partium, qualium vnitas aequatur diſtantiae mediae Solis a terra, ipſa Diameter Veneris pro hac Epocha maior quam 14″ ſtatui non poteſt. Praeterea, ſi ſupponamus pro Epocha conſtituta Latitudinem Veneris Geocentricam ita eſſe corrigendam, vt cum illa Reguli prorſus conſentiens reddatur, quia differentia inter has Latitudines, demta ſemidiametro Veneris, eſt 1′. 41″, ex hac correctione pro Latitudine Veneris Geocentrica orietur correctio Latitudinis Heliocentricae ſaltem 2′. 30″, cui correctioni reſpondet in Tabulis variatio argumenti Latitudinis, quae duo excedit Gradus, qualis correctio pro loco Nodi Veneris minime admitti poteſt. Immo vero in Longitudine Veneris Heliocentrica correctionem nimis magnam adhibere cogeremur, ſi obſeruatio a *Maeſtlino* facta rite ſibi conſtare ſupponatur. Inuenimus enim ex variatione decem minutorum primorum pro Longitudine Heliocentrica Veneris, Longitudinem Geocentricam 8 minutis immutari, quo facto ſi iſta correctio ſtatuatur ſubtractiua, Longitudines Veneris et Reguli pro tempore obſeruato ſatis redduntur conſentientes. Praeterea obſeruandum eſt calculum me inſtituiſſe pro 15 Sept. 15ʰ. tempore Pariſino, at quum obſeruatio Tubingae ſit facta, quae vrbs 25′. in tempore verſus Orientem eſt ſita, huius circumſtantiae habita quoque ratione differentia inter Longitudines Veneris et Reguli aliquantulum diminuetur.

§. 12. Anno aerae Iulianae 1590 die 3 Octobris hora 5 matutina, *Maeſtlinus* Tubingae totum fere Martem

tem

tem a Venere coopertum obſeruauit, referente *Kepplero* in Aſtronomia Optica pag. 305. Pro tempore hoc obſeruato habetur Longitudo Solis 6ˢ. 19°. 28′ et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 9, 998148. Ex Tabulis vero a Celeb. *de la Lande* confectis inuenitur Longitudo Martis Heliocentrica 4ˢ. 26°. 0′. 24″, Latitudo eius Borealis 1°. 49′. 16″ et Logarithmus diſtantiae Martis a Sole 0, 221380; tum vero Longitudo Veneris Heliocentrica 3ˢ. 24°. 44′. 9″; Latitudo eius Borealis 2°. 15′. 45″ et Logarith diſtantiae Veneris a Sole 9, 855950. Ex Tabulis autem *Halleianis* ſit Longitudo Martis Heliocentrica 4ˢ. 25°. 58′. 46″; Latitudo Bor. 1°. 49′. 22″ et Logar. diſtantiae Martis a Sole 0, 221254; pro Venere autem Longitudo Heliocentrica 5ˢ. 24°. 42′. 59″, Latitudo Borealis 2°. 15′. 21″ et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856004. Hinc colligitur ſecundum Tabulas Cel. *de la Lande*, Longitudo Martis Geocentrica 5ˢ. 15°. 31′. 16″; Latitudo eius Borealis 1°. 15′. 56″; Longitudo autem Veneris Geocentrica erit 5ˢ. 15°. 31′. 28″ et Latitudo Borealis 1°. 16′. 0″. Tum vero ſecundum Tabulas *Halleii* ſit Longitudo Geocentrica Martis 5ˢ. 15°. 30′. 26″ et Latitudo 1°. 16′. 1″ B; Veneris autem Longitudo Geocentrica 5ˢ. 15°. 30′. 51″ et Latitudo 1°. 15′. 57″ B. Quaecunque igitur harum Tabularum in vſum vocentur, obſeruatio per illas omnino confirmatur, ideoque Stellam Martis a Venere reapſe fuiſſe obtectam, vti *Maeſtlinus* obſeruauit, non omnino dubium eſt. Leuiores autem iſtae diſcrepantiae, quae ſe produnt ratione habita diametrorum Veneris et Martis, vel parallaxeos, vel etiam effectuum ex aberratione oriundorum, facile explicari poſſunt. Eſt enim pro tempore commemorato diſtantia Veneris a terra 0, 8073, hincque Diameter veneris 21″ aequabit; diſtantia

autem Martis a terra quum ſit 2, 3974 erit Diameter huius Planetae 5″, et Parallaxis Veneris 11″ eaque Martis 4″ exaequabit. Denique ob Elongationem Martis a Sole 34 fere graduum, erit Aberratio pro Marte − 31″, pro Venere autem Aberratio non erit niſi − 3″; facta iam ſtatim adplicatione huius correctionis, erit Longitudo Martis Geocentrica ſecundum Tabulas Cel. *de la Lande* 5ˢ. 15°. 30′. 45″ et Longitudo Veneris Geocentrica 5ˢ. 15°. 31′. 25″, quo ipſo diſcrepantia in Longitudine inter hos Planetas nonnihil augetur.

§. 13. Sepoſita nunc conſideratione Parallaxeos pro vtroque Planeta, quippe quum inde pro diſtantia centrorum vix maior quam 6 vel 7 ſecundorum variatio prodire poterit; nunc disquiramus quo momento temporis vera coniunctio centrorum Martis et Veneris contigerit, Parallaxium ſepoſita conſideratione. Hic primum noſſe oportet eſſe motum Veneris diurnum e terra viſum pro Epocha obſeruationis 1°. 12′. 46″, Martis autem motum diurnum 37′. 42″, vnde motus relatiuus, quo motus Veneris illum Martis ſuperat, erit 35′. 4″. Tempore igitur obſeruato, quia inuenta eſt differentia Longitudinum Geocentricarum Martis et Veneris 40″, vbi quidem Veneris Longitudo illam Martis excedit, inde omnino infertur veram coniunctionem centrorum contigiſſe 1591. die 2. Octob. 15ʰ. 33′, ſiue 27 minutis primis ante tempus Epochae, pro quo noſtri calculi ſubducti fuerunt, vbi quidem intelligitur has concluſiones eatenus tantum pro omnimode exactis haberi debere, quatenus Longitudines Geocentricae Planetarum ex Tabulis concluſae rite ſibi conſtant. Si igitur tempore coniunctionis bini Planetae eandem habuerint

rint Latitudinem, momentum, quo bini Planetae ſe tangere viſi ſunt, anteuertet ipſum tempus coniunctionis 18 circiter minutis, adeo vt, ſi coniunctio fuerit centralis, totum tempus occultationis 36 vel 37 minutis primis prorſus fuerit abſolutum. Sin vero ſupponatur differentia Latitudinum apparentium 9″, vbi Parallaxi effectum 5″ tribuimus, inde colligeretur duratio occultationis 35 fere minutorum. Dolendum ſane eſt ante inuenta Teleſcopia huiusmodi obſeruationibus omnimodam exactitudinem conciliari non potuiſſe, ita vt Aſtronomis non aeque proficuae ſint, ac omnino eſſe poſſent; pro hac tamen obſeruatione nulli relinquitur dubio locus, quin occultatio reuera locum habuerit, quia Latitudinum Geocentricarum pro binis Planetis eiusmodi ſunt valores, qui optime cum hoc Phaenomeno quadrant. Caeterum quia de exactitudine maxime ſcrupuloſa me ſollicitum eſſe vel ea me prohibuit circumſtantia, quod de exacto temporis momento, quo haec obſeruatio facta eſt, non conſtat, eam ob rationem ſuperfluum omnino iudicaui, vt in veros valores effectuum Parallacticorum inquirerem.

§. 14. Celebris nunc ſequitur obſeruatio a *Maeſtlino* et *Kepplero* Tubingae facta, anno aerae Iulianae 1591. 8 Ianuarii 16ʰ, qua celebratiſſimi hi Aſtronomi viderunt Planetam Iouis a Planeta Martis fuiſſe obtectum, ex colore enim rutilo Martis arguebant hunc Planetam partem quandam Iouis obtexiſſe. Confer ſaepius citatum locum Aſtronomiae Opticae *Keppleri.* Pro hoc igitur temporis momento habetur, 1°. Longitudo Solis 9ˢ. 28°. 40′ et Logarithmi diſtantiae Solis a terra 9,993209. 2°. Longitudo Iouis Heliocentrica 7ˢ. 5°. 0′. 13″, Latitudo eiusdem Plane-

tae 1°. 8′. 59″ Bor. et Logarithm. diſtantiae Iouis a Sole 0,734124. 3°. Longitudo Martis Heliocentrica 6ˢ. 9°. 31′. 12″, Latitudo eius Borealis 1°. 5′. 48″ et Logarithmus diſtantiae Martis a Sole 0,210987, vbi quidem binae poſteriores determinationes ex Tabulis Celeb. *de la Lande* computo ſunt elicitae. His poſitis colligitur Longitudo Iouis Geocentrica 7ˢ. 15°. 2′. 14″ Latitudo eius Borealis 1°. 6′. 36″; pro Marte autem reperietur Longitudo Geocentrica 7ˢ. 15°. 2′. 46″ et Latitudo Geocentrica 1°. 6′. 50″ vbi ob Longitudines Planetarum aeque ac Latitudines optime conſentientes, non dubitare fas eſt, quin Planeta Martis partem quandem diſci Iouis obtexerit. Immo vero ipſo temporis momento aſſignato, hanc occultationem locum habere potuiſſe conſtat, quia ob diſtantiam Iouis a terra tempore obſeruationis 5,6161, erat diameter Iouis apparens 34″, 1 et ob diſtantiam Martis a terra 1,6005, erat diameter Martis 7″, 1, ideoque ſumma ſemidiametrorum 21 fere ſecundorum, quae non niſi 10″ a differentia inter Longitudines Planetarum Geocentricas diſcrepat.

§. 15. Quoniam autem pro 7. Ianuar. 16ʰ. inueni Longitudinem Iouis Geocentricam 7ˢ. 14°. 54′. 43″, illamque Martis 7ˢ. 14°. 28′. 31″, ob motum relatiuum Martis a Ioue interuallo viginti quatuor horarum 25′. 44″, nec non motum horarium relatiuum 1′. 4″, verum tempus coniunctionis centrorum Iouis et Martis incidet in 8 Ianuar. 15ʰ. 30′ temporis medii Pariſini, exiſtente tunc temporis Longitudine centri pro vtroque Planeta 7ˢ. 15°. 2′. 5″. Heic autem probe perpendendum eſt, neque correctionis ex Aberratione pro vno vel altero Planeta oriundae vllam habitam eſſe rationem, nec etiam paruulae iſtius, quae pro Mar-

Marte locum habet, Parallaxis. Quia autem Aberratio pro Marte non eſt niſi 3″ ſubtractiua, illaque pro Ioue 1″ poſitiua, hinc paruulum omnino oritur diſcrimen; nec ex Parallaxi Martis, quae ad horizontem vix 5″ excedit, vlla ſenſibilis producetur differentia. Quicquid ſit hypothetice hic tantum argumentamur ex ſuppoſita nimirum perfecta exactitudine Tabularum. Quum igitur inuenta ſit ſumma Diametrorum Iouis et Martis 41″, 8, patet hanc quantitatem reſpondere 39′ ex motu relatiuo Planetarum, vnde colligeretur totam occultationem 39′ tranſiiſſe, ſi nimirum Latitudines Planetarum perfecte conſentientes fuiſſent, at ſi differentia Latitudinum ſtatuatur 10″, duratio occultationis erit 37′. Si correctiones ex Aberratione orivndae reapſe adplicentur, inde fiet tempus coniunctionis 15^{h}. 26′ temporis medii Pariſini, ideoque parum diuerſum ab eo quod ſupra inuenimus. Qualescunque de caetero ſint errores Tabularum, quia differentia in Latitudine Geocentrica Planetarum non niſi 14″ obſoluitur, omnino dubitari nequit, quin Planeta Martis prae diſco Iouis tranſierit.

§. 16. Sequitur iam occultatio Reguli a Venere anno 1598 aerae Iulianae 14. Septemb. hora 14. a Keplero Gratii in Stiria obſeruata (*Keppleri* Aſtronomia Optica pag. 305.). Pro hoc momento allato eſt Longitudo Solis 6^{s}. 1°. 39′; Logarithmus diſtantiae Solis a Terra 0, 000417; Longitudo Veneris Heliocentrica 2^{s}. 26°. 57′. 42″, Latitudo eius Borealis 48′. 36″ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 856770 prouti ex Tabulis Cel. *de la Lande* colligitur. Tabulae vero Halleianae praebent Longitudinem Veneris Heliocentricam 2^{s}. 26°. 57′. 16″, Latitudinem ejus Borealem 48′. 47″ et Logarithmum diſtantiae

tiae a Sole 9, 856890. Hinc concluditur ex priori determinatione Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 24^\circ. 23'. 44''$ et Latitudo $29'. 19''$. B; ex poſteriori vero Longitudo huius Planetae Geocentrica $4^s. 24^\circ. 23'. 6''$ et Latitudo $29'. 38''$ B. Quum igitur pro tempore obſeruationis habeatur Longitudo Reguli $4^s. 24^\circ. 14'$ cum Latitudine Boreali $26'. 40''$, intelligitur Regulum a Venere non fuiſſe obtectum, quamuis ita *Keplero* haec aſtra nudis oculis intuenti videri potuerit. Quia autem pro 18 Sept. 14^h, ſit Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 25^\circ. 34'. 58''$, ideoque motus Veneris diurnus a terra ſpectatus $1^\circ. 11'. 14''$, intelligitur veram coniunctionem Veneris et Reguli ſecundum Longitudinem Epocham noſtram $3^h. 17'$ anteuertiſſe, quatenus nimirum et Longitudo Reguli habita ratione praeceſſionis exacte ſupponatur cognita, nec in loco Geocentrico Veneris ſenſibilis aliquis ſit error. Quodſi autem ex iſthac obſeruatione vera diſtantia Veneris ſecundum Longitudinem elici poſſit, huius obſeruationis vſum facere liceret pro determinando motu Nodi pro Venere, quia hic Planeta tempore huius obſeruationis non multum a Nodo aſcendente diſtabat.

§. 17. Procedimus nunc ad obſeruationem factam Anno 1627 die 5 Maii 10^h. Stylo Gregoriano, qua viſus eſt Planeta Iouis adeo propinquus ſupremae in fronte Scorpii, vt iudicatus ſit a nonnullis Aſtronomis hanc Stellam occultaſſe. (Conf. Aſtronomiam Britannic. *Vincentii Wing*. pag. 288.) Pro tempore commemorato, quum ſit locus Solis $1^s. 14^\circ. 56'. 38''$; Logarithm. diſtantiae Solis a Terra 0, 004448; Longitudo Iouis Heliocentrica $7^s. 25^\circ. 30'. 36''$; Latitudo eius Bor. $51'. 36''$ et Logar. diſtantiae Iouis a Sole

Sole 0. 729537; ſiet omnino Longitudo Iouis Geocentrica 7s. 27°. 56′. 13″ et Latitudo Borealis 1°. 3′. 16″. At pro momento temporis allato eſt Longitudo ſtellae β in fronte Scorpii 7s. 27°. 59′ et Latitudo 1°. 3′. 48″ Bor., ex quo concluditur occultationem pro temporis momento allato locum non habuiſſe, quod etiam conſentit cum obſeruatione *Hortenſii*, quippe qui vidit tempore citato Iouem ab iſta Stella Scorpii quaſi 5′ ad occaſum diſtare (vide *Lansbergii* Theſaur. Obſeruat. Aſtronomic. fol. 164). Neque tamen hinc rite infertur, quia occultatio tempore commemorato non facta eſt, in tranſitu hoc Iouis prope ſtellam β Scorpii occultationem locum habere non potuiſſe, nam ob diſtantiam Iouis a terra pro tempore obſeruationis 4, 3753, habebitur diameter Iouis 44″, 3 cuius ſemiſſis vix differt ab inuenta differentia inter Latitudines Geocentricas Iouis et Stellae, quae non niſi 32″ habetur. Temporis autem momentum, quo vera coniunctio Stellae cum Planeta celebrari debuit, inuenietur ex cognito motu diurno Iouis e terra ſpectato: eſt autem Longitudo Iouis Geocentrica 24 horis ante Epocham noſtrae obſeruationis 7s. 28°. 2′. 20″; quum igitur Iupiter 24 horis abſoluat 6′. 7″ motu retrogrado, tempus coniunctionis anteuertet momentum obſeruatum 11 circiter horis. Facile autem intelligitur hanc concluſionem eatenus tantem pro indubia habere poſſe, quatenus loca Planetae et Stellae exacte ſint determinata, vbi quidem ſi correctiones alicuius momenti admittendae ſint, inde tempus coniunctionis iam determinatum valde multum immutabitur. Quicquid tamen ſit, quia de Latitudinibus vel Stellae vel Planetae non multum dubitare licet, et differentia inter has Latitudines haud multo maior eſt ſemi-

 dia-

diametro Iouis, tam prope Iouem ad Stellam tranſiiſſe oportuit, vt occultationem quaſi factam fuiſſe cenſeri potuiſſet.

§. 18. Proxima, quae nobis ſe obtulit huius generis occultatio illa eſt, qua Celebris Aſtronomus *Kirchenus* Anno 1679 die 16 Ianuar. $14^h. 30'$. Temp. med. Pariſini obſeruauit Planetam Saturni ſtellam o in conſtellatione Tauri occultaſſe. Pro tempore iſto habetur locus Solis $9^s. 27^\circ. 13'. 14''$; Logarithm. diſtantiae Solis a terra 9, 993067; Longitudo Saturni Heliocentrica ex Tabulis Cel. *de la Lande* $2^s. 22^\circ. 8'. 24''$, Latitudo Auſtralis $1^\circ. 12'. 27''$; Logarithmus diſtantiae Saturni a Sole 0, 954647. Ex Tabulis vero *Halleii* fit Longitudo Saturni Heliocentrica $2^s. 21^\circ. 58'. 22''$; Latitudo $1^\circ. 12'. 51''$ Auſtr. et Logarithmus diſtantiae Saturni a Sole 0, 954103. Hinc vero calculo ſubducto inueni Longitudinem Saturni Geocentricam $2^s. 18^\circ. 11'. 54''$ et Latitudinem Auſtralem $1^\circ. 19'. 21''$; ex poſteriori autem determinatione habetur Longitudo Saturni $2^s. 18^\circ. 0'. 26''$ et Latitudo Auſtr. $1^\circ. 19'. 48''$. Iam quia in Catalogo *Flamſtedii* ad Annum 1777 reducto (vide Connoiſſance des temps 1777) fit Longitudo ſtellae o Tauri $2^s. 19^\circ. 22'. 43''$ et Latitudo $1^\circ. 20'. 12''$. Auſtr. fieret pro Epocha obſeruationis Longitudo ſtellae $2^s. 18^\circ. 0'. 40''$ et Latitudo $1^\circ. 21'. 33''$, vbi quidem determinationes ex Tabulis Halleianis elicitae melius voto ſatisfaciunt, ac illae quas Tabulae Cel. *de la Lande* praebent. Verum pro Latitudine tamen diſcrimen tantum eſt, vt dubitari poſſet, an occultatio reuera locum habuerit, niſi ex obſeruatis *Kirchii* id praeter omnem dubitationem demonſtratum eſſet. Quum igitur motus Nodi pro Saturno ſatis exacte ſit cognitus, pro Latitudine Saturni vix vlla ſenſibilis correctio locum habe-

habere poteſt. Nihil igitur remanet, niſi vt ſupponamus Latitudinem ſtellae o a *Flamſtead* minus exacte eſſe determinatam. Verum re bene penſitata inueni pro reducenda determinatione *Flamſtedii* ad annum 1777, variationis pro Latitudine nullam omnino habitam eſſe rationem, ideoque pro Epocha obſeruationis manebit illa Latitudo a *Flamſtead* obſeruata 1°. 20′. 12″, quae a Latitudine apparente Saturni non niſi 24″ differt, vnde habita ratione diametrorum apparentium globi Saturni, nec non annuli eius, iam nullus relinquitur dubio locus, quin occultatio reapſe locum habuerit.

§. 19. Anno huius ſeculi decimo ſexto, die 2 Decemb. hor. 20 a Celebri Anglorum Aſtronomo *Pound* obſeruatum eſt Planetam Iouis ſtellam quandam in Conſtellatione Geminorum occultaſſe. Eſt vero ex Tabulis Cel. de la *Caille* locus Solis pro hoc tempore 8ˢ. 11°. 23′. 21″. Et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 9,993406; ex Tabulis autem Cel. de la *Lande* habetur Longitudo Iouis Heliocentrica 2ˢ. 25°. 5′. 6″; Latitudo eius Auſtralis 17′. 24″ et Logarith. diſtantiae Iouis a Sole 0,709709. Hinc concluditur Longitudo Geocentrica Iouis 2ˢ. 28°. 17′. 13″ et Latitudo huius Planetae Auſtr. 21′. 22″. Diameter autem Iouis apparens erit 46″. His perpenſis facile intelligitur ſtellam, quam eo tempore a Ioue occultatam fuiſſe oportuit, non aliam eſſe quam illam, cuius Elementa pro Anno 1777 ita exprimuntur: Longitudo 2ˢ. 29°. 7′. 6″ et Latitudo Auſtralis 21′. 5″. Hinc enim pro Epocha obſeruationis fiet Longitudo Stellae 2ˢ. 28°. 16′. 40″ circiter et Latitudo 21′. 5″, ita vt nullum ſit dubium, quin occultatio reapſe facta ſit. Eſt vero Stella modo dicta illa 8 magnitu-

gnitudinis, cuius Elementa in Catalogo *Flamſtedii* ad Annum 1690 ita habentur expoſita: Longitudo 2ˢ. 27°. 54′. 29″ et Latitudo A. 21′. 5″.

§. 20. Denique celebris illa obſeruatio nobis commemoranda eſt, qua Celeb. *Bewis* Anno 1737 die 28 Maii, hora circiter decima obſeruauit Planetam Mercurii a Venere fuiſſe occultatum. Habetur autem pro hoc tempore locus Solis 2ˢ. 7°. 26′. 48″ et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 0, 006202. Tum vero fiet ex Tabulis Cel. *de la Lande* Longitudo Mercurii Heliocentrica 5ˢ. 23°. 47′. 55″, Latitudo eius Auſtralis 5°. 28′. 51″ et Logarithmus distantiae Mercurii a Sole 9, 583312; tumque Longitudo Veneris Heliocentrica 7ˢ. 27°. 47′. 36″; Latitudo Auſtralis 57′. 57″ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9,860357. Ex Tabulis autem *Halleii* fit Longitudo Heliocentrica Mercurii 5ˢ. 23°. 50′. 55″, Latitudo 5°. 28′. 36″ et Logarithmus diſtantiae Mercurii a Sole 9, 583459; et pro Venere Longitudo Heliocentrica 7ˢ. 27°. 48′. 12″, Latitudo 57′. 44″ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 860329. Hinc ex priori determinatione concluditur Longitudo Mercurii Geocentrica 2ˢ. 29°. 31′. 9″ et Latitudo Auſt. 2°. 9′. 8″; tum vero fit pro Venere Longitudo Geocentrica 2ˢ. 29°. 31′. 54″ et Latitudo 2°. 9′. 52″, ita vt nunc appareat occultationem omnino locum habuiſſe eo tempore, quo obſeruata eſſe perhibetur. Nam paruula, quae in Latitudine adeſt diſcrepantia, nullam omnino parit difficultatem, ſiquidem ob diſtantiam Veneris a terra 0, 32336 ſit diameter Veneris apparens 51 fere ſecundorum, tumque ob diſtantiam Mercurii a terra 0, 9782 diameter apparens Mercurii cenſebitur 7″. Praeterea habetur pro tempore obſeruato

ſeruato Parallaxis horizontalis pro Venere $26''$, 6 et pro Mercurio $8''$, 6; ideoque Parallaxis reſpectiua Veneris a Mercurio $17''$, 8; ita vt effectus parallactici non oriantur pro hac obſeruatione niſi valde exigui. Ex correctione, quae Aberrationi debetur, pro binis Planetis vix vlla ſenſibilis producetur variatio, eſt enim pro Venere illa correctio $+ 2''$ et pro Mercurio $- 7''$, ita vt locus relatiuus hinc $9''$ immutetur.

§. 21. Quia nunc pro hora 9na die 28 Maii inveniatur Longitudo Mercurii Geocentrica $2^s. 29°. 27'. 38''$ et Latitudo $2°. 9'. 13''$; pro Venere autem Longitudo Geocentrica $2^s. 29°. 32'. 33''$ et Latitudo $2°. 10'. 17''$, fiet motus horarius relatiuus in Longitudinem $4'. 8''$, ideoque tempus coniunctionis centrorum Veneris et Mercurii anteuertet momentum aſſignatum 13 circiter minutis primis, vbi tamen ob neglectum effectum Parallacticum in Longitudine 3 vel 4 minutorum primorum incertitudo locum habere poteſt. Verum de hoc momento coniunctionis ex ipſa obſeruatione tutius eſſe videtur iudicium, quum enim Cel. *Bewis* iudicaſſet tempore $9^h. 43'$ Mercurium adhuc diſtare a limbo Veneris $\frac{1}{12}$ quaſi parte Diametri Veneris, ſi haec diſtantia aeſtimetur 5 vel 6 ſcrupulorum ſecundorum, colligitur contactum Veneris cum Mercurio vno minuto cum dimidio tardius ac iſtud momomentum obſeruatum contingere debuiſſe. Ipſa autem duratio occultationis, ſi quidem ſupponatur centrum Mercurii per ipſum centrum Veneris tranſuiſſe, non niſi 16 minutis primis abſoluta fuit; centralis igitur coniunctio in id fere momentum incidit, quo diſpulſis nubibus vidit Cel. *Bewis* hor. 9. 51' Mercurium totum a Venere eſſe obtec-

 tum.

tum. Si vero ſupponamus differentiam Latitudinum Veneris et Mercurii 10 fuiſſe ſecundorum, duratio occultationis erit 15 minut. primorum, et ſi differentia Latitudinis ſtatuatur 20″, fiet duratio occultationis 11′. 40″ circiter. Haec autem hypothetice tantum argumentamur, neque certa determinatio heic locum habet, niſi quatenus differentia Latitudinum Veneris et Mercurii per ipſam innoteſceret obſeruationem: quo facto nullo negotio tempus coniunctionis Planetarum proxime ſaltem determinari poſſet. Denique heic obſeruamus Tabulas *Halleii* praecipue quod Latitudinem attinet, melius cum obſeruatione quadrare, quum ex his Tabulis habeatur Longitudo Mercurii Geocentrica 2ˢ. 29°. 31′. 44″ et Latitudo 2°. 9′. 7″, Veneris autem Longitudo Geocentrica 2ˢ. 29°. 30′. 55″ et Latitudo 2°. 9′. 26″ Auſtr., vtrae autem Tabulae potiorem mereantur fidem, id quidem non niſi praeuia obſeruatione decidi poteſt.

§. 22. Vt vno nunc intuitu concluſiones ex noſtris calculis deductas conſpectui exponamus generalia earum capita heic repetere iuuabit. De occultatione igitur Aſelli Auſtralis a Ioue, quae Anno ante Natiu. Chriſti 240 die 3 Septembris facta eſſe perhibetur, demonſtrauimus, quod iſta obſeruatio merito pro ſuſpecta haberi debeat; quia Latitudo ſtellae tempore obſeruationis erat Auſtralis: fieri autem non potuit, vt Latitudo Iouis inueniretur Auſtralis. Pro iſta obſeruatione, qua Anno 271 ante N. C., die 17 Ianuarii, Planeta Martis ſtellae β in fronte Scorpii iuncta videbatur, ex calculo quidem vix concludi poteſt, vtrum haec obſeruatio rite ſibi conſtet, nec ne? Et ſaltem ſi determinatio Latitudinis pro Stella, quam attulimus, rite ſe ha-

habeat, diſtantia ſecundum Latitudinem inter Stellam et Planetam Martis ſatis habetur ſenſibilis, etiamſi Longitudines perfecte redderentur conſentientes. Idem quoque pronunciandum eſt de occultatione ſtellae η Virginis a Planeta Veneris, quae anno 271 ante N. C. die 11 Octob. hor. 17 facta eſſe dicitur. Propius autem ad veritatem accedit illa obſeruatio Anno Chriſti 498 facta, qua obſeruatus eſt die 1 Maii hor. 7 Planeta Martis ita iunctus Planetae Iouis, et ipſum quaſi tangere videretur: nam pro iſto momento differentia Planetarum in Longitudine vix 8′ excedit, differentia autem Latitudinum nequidem 6′ abſoluitur. Pro occultatione Reguli a Venere Anno 1574 die 16 Septemb. a *Maeſtlino* obſeruata, inuenimus differentiam inter Longitudinem Stellae et Planetae pro momento obſeruato 9′ et in Latitudine duorum circiter minutorum: dubium igitur manet, vtrum aliqua Stellae facta ſit occultatio. At pro obſeruationibus ab eodem Celeb. Aſtronomo *Maeſtlino* factis, Anno 1590 die 2 Octob. hor. 17 et Anno 1591. die 8 Ianuar. 16°, quarum priori Martem a Venere coopertum obſeruauit, poſteriori autem tranſitum Martis ante diſcum Iouis vidit, certo demonſtrari poteſt calculum cum obſeruatione tam bene conſpirare, vt de harum obſeruationum veritate nulli relinquatur dubio locus. Secus autem eſt cum occultatione Reguli a Venere, quae Anno 1598 a *Kepplero* obſeruata eſſe perhibetur, differentia enim in Latitudine maior eſt, quam vt vlla occultatio locum habere potuerit. Pro obſeruatione tranſitus Iouis prope ſtellam in fronte Scorpii Anno 1627 die 5 Maii facta, demonſtrauimus occultationem quidem locum habere potuiſſe, verum tempore, quod Epocham obſeruationis 11 horis anteuertit. De reliquis autem occultationum

num obſeruationibus recentioribus, per calculum noſtrum penitus euictum eſt, has obſeruationes omnino confirmari, nec maiorem oriri diſſenſum calculi ab obſeruatione, quam vt ex leuiusculis erroribus Tabularum facilem inueniat explicationem. Hoc tamen in negotio antiquae illae obſeruationes praecipui forent momenti, modo loca Stellarum fixarum intra praeciſionem vnius vel alterius minuti pro Epochis obſeruationum haberentur determinata; his enim ſubſidiis certiſſimae concluſiones pro motibus Planetarum mediis, vt etiam pro motu Nodorum formari poſſent; verum quia de Longitudine et Latitudine Stellarum fixarum apud veteres Aſtronomos vix quidquam certi habetur determinatum, vſus huiusmodi obſeruationum ex hoc capite penitus fere deſtruitur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PRO DETERMINANDA POSITIONE VRBIS IAROSLAWL INSTITVTAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Obſeruationes has eadem prorſus methodo vt antehac inſtitui: Inquiſiui primum in ſtatum Quadrantis et in latitudinem loci per altitudines ſtellarum fixarum meridianas in hemiſphaerio Auſtrali et Boreali captas, atque reperi

Die $\frac{10}{21}$ Octobris ex α, β, γ Vrſae maioris et γ Antinoi, γ, ε Cygni nec non α Delphini, errorem ſubtractiuum 2′. 45″ et Latitudinem . . . 57°. 37′. 26″

Die $\frac{16}{27}$ Octobr. Ex α, β Vrſae maioris et α Aquilae γ Antinoi, γ Cygni, ε, α Delphini et ζ Pegaſi prodit error − 2′. 51″ et Latitudo 57. 37. 30

Die $\frac{13}{24}$ Decembr. Ex γ Cephei et β Pegaſi − 2′. 46″ 57. 37. 30

Die $\frac{17}{28}$ Decembr. Ex ſtella polari et α atque γ Pegaſi − 2′. 47″ 57. 37. 31

Medium ex 27 combinationibus praebet errorem − 2′. 47″ et Latitudinem . . 57. 37. 29

En ipſas obſeruationes et calculos.

Altitudines ſtellarum fixarum meridianae

Dies obſerv. St. novi.	Nomina fixar	Altit. Obſerv.	Error Quadran.	Refract.	Declinat. appar.	Latitudo.
2 Octob. 1784.	β Cygni	59°.57'.24"	−2.47	0'.38"	27°.31'.37½"	57°.37'.38½"
	α Sagittae	49. 58. 22	. .	0. 56	17. 32. 22	. . 43
	α Aquilae	40. 45. 30	. .	1. 17	8. 19. 2	. . 36
	γ Cygni	72. 0. 50	. .	0. 22	39. 35. 11	. . 30
21 Oct.	γ Antinoi	31. 0. 20	. .	1. 50	1, 26. 45	. . 22
	γ Cygni	72. 0. 59	. .	0. 22	39. 35. 18	. . 28
	α Delphin	47. 36. 31	. .	1. 1	15. 10. 16½	. . 33½
	ε Cygni	65. 36. 30	. .	0. 30	30. 10. 43	. . 30
	β Vrſ. maior	25. 14. 14	. .	2. 19	57. 31. 37	. . 31
	α - - -	30. 36. 23	. .	1. 52	62. 54. 15	. . 29
	γ - - -	22. 36. 0	. .	2. 36	54. 53. 21	. . 16
27 Oct.	α Aquilae	40. 45. 32	. .	1. 17	8. 19. 1½	. . 33½
	β - - -	38. 20. 0	. .	1. 24	5. 53. 38	. . 49
	γ Antinoi	31. 0. 29	. .	1. 50	1. 26. 46½	. . 21½
	γ Cygni	72. 1. 0	. .	0. 22	39. 35. 12	. . 21
	ε Delphini	43. 2. 0	. .	1. 11	10. 35. 28½	. . 26½
	α - - -	47 36. 40	. .	1. 1	15. 10. 16	. . 24
	α Aquarii	31. 5. 40	. .	1. 50	1. 21. 11	. . 46
	γ - - -	29. 59. 25	. .	1. 54	2. 27. 37	. . 39
	ζ Pegaſi	42. 9. 43	. .	1. 13	9. 43. 12	. . 29
	β Vrſ. maior	25. 14. 19	. .	2. 19	57. 31. 35½	. . 37½
	α - - -	30. 36. 26	. .	1. 52	62. 54. 13	. . 34
24 Dec.	β Pegaſi	59. 21. 20	. .	0. 39	26. 55. 22	. . 28
	γ Cephei	71. 14. 28	. .	0. 23	76. 26. 12	. . 30
28 Dec.	α Androm.	60. 20. 20	. .	0. 38	27. 54. 29	. . 34
	γ Pegaſi	46. 25. 50	. .	1. 3	13. 59. 27	. . 27
	Polaris	59. 31. 6	−2.47	0. 39	88. 9. 51	. . 31
					Medium	57°.37'.31"

Alti-

Altitudines Solis in Meridiano verſantis errore Quadrantis iam purgatae: in computu declinationis aſſumta eſt differentia Meridianorum 2½ horarum.

Dies Obſ. St. noui.	Altit. limbi ⊙ ſuper.	Refract. — parall.	½ Diam. ⊙lis.	Declinat. ⊙ Auſtr.	Eleuatio Poli.
29 Sept	29°.57′.10″	1′.45″,5	16. 2,5	2°.42′.51″	57°.37′.47″
30 .	29. 34. 15	1. 48,5	- 3	3. 6 12	- - 24½
4 Oct.	28. 1. 5	1. 56,5	- 4	4. 39. 16	- - 39½
16 .	23. 29. 35	2. 22	- 7	9. 11. 27	- - 27
21 .	21. 41. 6	2. 34	- 8,5	10. 59. 52	- - 44½
22 .	21. 20. 13	2. 36	- -	11, 21. 5	- - 26½
26 .	19. 57. 15	2. 47	- 10	12. 44. 13	- - 29
27 .	19. 36. 45	2. 50	- -	13. 4. 30	- - 45
30 .	18. 37. 23	2. 58	- 11	14. 4. 4	- - 42
18 Nov.	13. 15. 37	4. 11	- 15	19. 27. 4,5	- - 44½
26 .	11. 35. 41	4. 47	- 16	21. 7. 34	- - 48
1 Dec.	10. 45. 55	5. 8	- 17	21. 57. 40	- - 50
7 .	10. 0. 35	5. 29	- 18	22. 43. 47	- - 25
18 .	9. 18. 44	5. 51, 5	- 19	23. 26. 9	- - 17½
29 .	9. 32. 30	5, 44	- -	23. 11. 49	- - 44
9 Ian.	10. 42. 19	5. 11	- -	22. 1. 41	- - 19
15 .	11. 42. 19	4. 44	- 18,5	21. 1. 0	- - 43½
16 .	11. 53 43	4. 40	- -	20. 49. 29	- - 46½
21 .	12. 57. 15	4. 17	- 18	19. 16. 2	- - 18
22 .	13. 10. 57	4. 13	- 18	19. 32. 13	- - 21
28 .	14. 40. 30	3. 46	16. 17	18. 2. 0	- - 33
				Medium	57°.37′.35″

Ex his patet latitudinem Vrbis Jaroslawl tuto ſtatui poſſe 57°. 37½′.

De longitudine eiusdem Vrbis.

Quamuis multae eclipſes ſatellitum Iouis videri hic loci potuiſſent, verum inclementia coeli nubili reddidit eas inuiſibiles et conatus noſtros fecit irritos. Vix per totum commorationis tempus tres obſeruare licuit emerſiones, quarum duae priores ob rationes allegatas dubiae ſunt.

$\frac{19}{30}$ Nouembr. Emerſio 2^{di} ſatellitis $6^h. 44'. 20''$ Temp. vero. Nubibus in regione Iouis vagantibus Satellites et ipſe planeta ſaepe tegebantur.

$\frac{6}{17}$ Decembr. Emerſionem 1^{mi} Satellitis videbar mihi obſeruare $3^h. 51'. 53''$, obſeruatio haec etiam dubia ob nubeculas circumſtantes et crepuſculum, praeterea motus penduli ob dies nubilos non ſatis exploratus erat.

$\frac{15}{24}$ Decembr. Emerſio 1^{mi} Satellitis $5^h. 44'. 50''$ Temp. vero. Coelo ſereno et pacato faſciis mediocriter conſpicuis. Altitudo planetae $18°$. Obſeruatio haec ſatis bona mihi videbatur; collata cum momento ephemeridum $3^h. 13'. 30''$. praebet differentiam meridianorum inter Pariſios et Jaroslawl $2^h. 31'. 20''$, adeoque longitudinem a primo meridiano $57°. 50'$, quam pro vſu geographico ſufficientem eſſe confido.

His addi poſſunt ſequentes obſeruationes Lunae culminantis et comparatae cum fixis.

$\frac{10}{21}$ Ian.

	Temp. Horol.	Altitudo ab errore Quadr. lib.
$\frac{10}{21}$ Ianuarii. Poſito Quadrante in meridianum appulſum centri ſolis ad filum verticale obſeruaui - -	$0^h.32'.55''$	
Meridiem vero ex altitudinibus reſpondentibus verum reperi -	0. 33. 4	
β Tauri culminabat - -	9. 27. 27	60°.47'.43''
Limbus Lunae praecedens ad filum Quadr. vert. - - -	9. 35. 19	
Centrum Lunae culminat -	9. 36. 26½	59. 54. 47
$\frac{11}{22}$ Ianuar. Centrum Solis in meridiano	0. 34. 34½	
Altitudinibus matutinis reſpondentes ob nubes capere non potui, nox etiam nubila.		
$\frac{12}{23}$ Ianuar. Appulſus limbi ☽ praecedentis - - - - -	11. 25. 23	
Gentrum Lunae culminat -	11. 26. 30	57. 23. 40
β Geminorum culminat - -	11. 41. 33	60. 54. 47
Sequentes dies nubili		
$\frac{17}{28}$ Ianuar. Centrum Solis in meridiano - - - - - -	0. 44. 9½	

Inueſtigandam ex his obſeruationibus loci longitudinem ad aliud tempus reſeruare nunc coactus ſum.

Altitudines Limbi ☽ ſuperioris obſeruatae ſunt.

Declinationem acus magneticae inueni 4 graduum ad occidentem.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE KOSTROMAE HABITAE.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Altitudines ſtellarum fixarum meridianae:

Dies obſeru.	Nomina fixar.	Altituo obſeruata.	Refract. de la Caill.	Declin. appar. ad. d. obſeru.
$\frac{4}{15}$ Mart.	μ Gemin.	54°.55′. 0″	0′. 47″	22°.36′.16″
1785.	γ - -	48. 52.42	0. 58	16. 33.48
	ε - -	57. 37.44	0. 42	25. 19.18
	ζ - -	53. 10.48	0. 50	20. 51.58
	β - -	60. 50. 5	0. 37	28. 31.35
	δ Dracon.	35. 7.19	1. 34	67. 16.57
	α Cephei	29. 31.40	1. 56	61. 40.48
	β Cephei	37. 27.39	1. 27	69. 37.11
$\frac{13}{24}$ Mart.	δ Dracon.	35. 7.25	1. 34	67. 16.56
	Procyon.	38. 4.49	1. 25	5. 45.59
$\frac{15}{26}$ Mart.	α Gemin.	64. 38.40	0. 31	32. 20.46
	β - -	60. 50. 0	0. 37	28. 31.36
	β Cancr.	42. 8.33	1. 14	9. 49.47
	μ Leonis	59. 18.40	0. 40	27. 0.24
	α Cephei	29. 31.44	1. 56	61. 40.46
	β - -	37. 27.41	1. 27	69. 37.10

E combinationibus altitudinum ſtellarum verſus Boream et Auſtrum captarum, inquiſiui in errorem Quadrantis et in Latitudinem loci, vt ſequitur.

D.

			Error.	Latitudo.
Die $\frac{4}{15}$ Mart.	Ex δ Dracon. et	μ ♊ -	3′. 22″½	57°. 45′. 25″½
		γ - -	22	36
		ε - -	16	32
		ζ - -	24	24
		β - -	20½	27½
	Ex α Cephei et	μ ♊ -	26½	29½
		γ - -	26	30
		ε - -	20	36
		ζ - -	28	28
		β - -	24½	31½
	Ex β Cephei et	μ ♊ -	29	32
		γ - -	28½	32½
		ε - -	22½	38½
		ζ - -	30½	30½
		β - -	27	34
$\frac{13}{14}$ Mart.	Ex δ Dracon. et Procyone		10	46
$\frac{15}{16}$ Mart.	Ex α Cephei et	α ♊ -	12½	49½
		β ♊ -	24½	37½
		β ♋ -	17	45
		μ ♌ -	19	43
	Ex β Cephei et	α ♊ -	13½	50½
		β ♊ -	25½	38½
		β ♋ -	18	46
		μ ♌ -	20	44
Medium ex 24 combinationibus - -			3. 22	57. 45. 36

Sequuntur altitudines Solis meridianae, quibus correctio Quadrantis iam applicata, et in computu declinationis Solis differentia meridianorum inter Parisios et Koſtromam 2^h. 36′ ſuppoſita eſt.

D.

D. obſeru. St. nou.	alt. limb. ⊙ Boreal.	Refract. —parall.	½ diam. ⊙	Declin. ⊙	Eleuatio Poli.
1785.				Auſtral.	
27 Febr.	24. 26. 0	2'. 15"	16'. 11"	8°. 6'. 33"	57°. 45'. 53"
28 Febr.	24. 48. 46	2. 13	- -	7. 43. 51	47
3 Mart.	25. 57. 22	2. 7	16. 10	6. 35. 9½	45½
4	26. 20. 30	2. 5	- -	6. 12. 5	40
5	26. 43. 30	2. 2	16. 9,5	5. 48. 54	47½
7	27. 30. 18	1. 58	16. 9	5. 2. 19	30
8	27. 53. 33	1. 56	- -	4. 38. 54	38
10	28. 40. 20	1. 52	16. 8	3. 51. 58	42
14	30. 14. 33	1. 45	16. 7	2. 17. 31	48
15	30. 38. 6	1. 43	- -	1. 53. 50	54
				Boreal.	
21	33. 0. 16	1. 34	16. 5,5	0. 28. 19	42½
24	34. 10. 50	1. 30	16. 4,5	1. 39. 9	53½
26	34. 58. 20	1. 28	16. 4	2. 26. 12	24
31	36. 54. 24	1. 21	16. 2,5	4. 22. 50½	50
				Medium - -	57. 46. 44

Latitudo igitur vrbis Koſtromae rotunde ſtatui poteſt 57°. 45'⅔.

Cognitis latitudinibus vrbium Iaroslawl et Koſtromae, atque diſtantia illarum breuiſſima, 60 nimirum Werſtarum, quae in partibus circuli conſtituunt 34'. 27", ſupputaui angulum ad polum inter meridiares horum locorum 1°. 2'. 36"; Longitudo vero Iaroslawl 57°. 50', erit Longitudo Koſtromae 58°. 52'. 36", quae determinatio non ſane multum a veritate abludere poteſt.

Declinationem acus magneticae reperi 3¾ grad. verſus occidentem.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN CHERSONESO TAVRICA ANNO 1785 INSTITVTAE

a *Theodoro Tchernoi.*

Referente
STEPHANO RUMOVSKI.

I.

Pro definiendo ſitu Geographico Cherſoneſi Tauricae, regionumque ad Caucaſum ſitarum placuit Sacrae Imperatoriae Maieſtati, vt ab Academia ablegaretur neceſſariis inſtrumentis munitus obſeruator. Munus hoc demandatum Viro Cl. *Theodoro Tchernoi*, Academiae Scientiarum Adiuncto Geographiae addicto, obſeruatori diligenti et experto; etenim in omnibus obſeruationibus, quas beate defunctus *Iohannes Islenieff* pro ſitu Geographico variorum Imperii Ruſſici locorum inſtituit, Vir Cl. *Tchernoi* ſociam operam praebuit, et poſt modum omnibus interfuit, quas mihi inſtituere hic licuit. Ille menſe Maio iter ingresſus ad iſthmum, nobis Perecop dictam, peruenit menſe Iunio, ibique quadrante tripedali a *Caniuet* elebarato pro Latitudine ſequentes inſtituit obſeruationes.

Die $^{21\ Iunii}_{1\ Iulii}$ altitudinem maximam limbi Solis Borealis reperit 67°. 6′. 23″, quae errore quadrantis + 11′. 27″ correcta fit 67°. 17′. 50″, et adhibita refractione – parallaxi – 21″, ½ diametro Solis 15′. 46″ altitudo centri Solis prodit 67°. 1′. 43″. Vnde Latitudo Perecop reperitur 46°. 4′. 27″. Declinatione Solis exiſtente 23°. 6′. 10″.

Die 22 Iunii circa meridiem altitudo limbi Solis Borealis reperta eſt 67°. 1′. 18″. quae errore quadrantis correcta fit 67°. 12′. 45″; vnde adhibita refractione – parallaxi 21″, ½ diametro Solis 15′. 46″ Declinatione 23°. 1′. 44″, Latitudo Perecop reperitur 45°. 5′. 6″.

Eadem die captae ſunt altitudines maximae Lucidae Lyrae et Lucidae Aquilae, quarum illa inuenta eſt 82°. 23′. 38″, et errore quadrantis + 11′. 27″, Refractione – 8″ correcta dat Latitudinem iſthmi Perecop 46°. 0′. 28″ Declinatione Lucidae Lyrae apparente pro tempore obſeruationis exiſtente 38°. 35′. 25″.

Pari modo altitudo Lucidae Aquilae obſeruata eſt 52°. 7′. 45″, quae errore quadrantis + 11′. 27″, refractione – 44″ correcta, ob Declinationem ſtellae apparentem 8°. 18′. 42″ Bor. dat Latitudinem iſthmi Perecop 46°. 0′. 42″. Hinc pro vſu geographico Latitudo Iſthmi Perecop ſtatui circiter poterit 66°. 2½′.

Obſer-

II.

Obſeruationis Eupatoriae inſtitutae, alias *Kesloff* dictae.

Pro definiendo valore partium micrometri quadranti praefixi ter menſurauit diametrum Solis verticalem; die $\frac{3}{14}$ Iulii reperit illum valere 13 Reu. 38 part. cent. die $\frac{4}{15}$ Iulii 13, 36 Reu. et tandem die $\frac{5}{16}$ Iulii inuenit diametrum Solis aequaſſe 13, 37 Reu. Eſt vero diameter Solis pro his diebus 31′. 33″, 8: vnde concluditur valor vnius Reuolutionis = 2′. 21″ et vnius centeſimae partis = 1″, 41.

Verificationem quadrantis ad horizontem Eupatoriae bis inſtituit: die $\frac{7}{18}$ Iulii dirigendo tubum in obiectum ad $\frac{3}{4}$ Werſt. diſtans altitudinem eius reperit in ſitu recto quadrantis 5, 21 Reu. Poſt medum collocato quadrante in menſula, cuius altitudo aequabat radium quadrantis, altitudinem eiusdem obiecti in ſitu inuerſo quadrantis reperit 14, 95 Reu. hinc concluditur error in defectu 4, 87 Reu.

Die $\frac{9}{25}$ Iulii altitudinem eiusdem obiecti reperit

in ſitu recto quadrantis	5, 04	Reu.
in ſitu in verſo - -	14. 81.	
Error. in defectu	4. 88	

et ſumendo medium prodit correctio altitudinibus obſeruatis addenda 4, $87\frac{1}{2}$ Reu. = 11′. 27″.

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſv.	Alt. obſeru. limb. ☉ Bor.	Error. quadrat.	Refr. −paral	½ Diem ☉lis.	Decl. ☉lis Bor.	Latitudo.
28 Iun. / 9 Iul.	67°.10′. 6″	+11′.27″	− 21″	15′.47″	22°.19′.30″	45°.14′.11″
30/11 –	66. 54. 46	- -	—	- -	22. 4. 4	14. 1
1/12 Iul.	66. 40. 37	- -	—	- -	21. 55. 56	14. 0
9/20 —	65. 26. 48	- -	—	15. 48	20. 35. 45	13. 40
12/23 —	64. 50. 42	- -	—	- -	19. 59. 58	14. 0
15/26 —	64. 11. 58	- -	—	- -	19. 21. 11	13. 58
16/27 Iul.	63. 30. 11	+11. 27	− 21	15. 48	18. 39. 28	45. 14. 4
					Medium	45. 13. 59.

Altitudines meridianae Stellarum fixarum.

Dies obſv.	Nomina ſtellarum.	Altitudo obſeruat.	Error. quadrat.	Refr.	Decl. Nut. et Aberr. corr.	Latitudo.
1/12 Iul.	α Aquilae	52°.54′.11″	+11′.27″	43″	8°.18′.44″.b	45°.13′.49″
3/14 —	δ Hercul.	69. 41. 26	- -	22	25. 6. 24	13. 53
	α Lirae	83. 10. 17	- -	7	38. 35. 30	13. 53
	α Aquilae	52. 54. 15	- -	43	8. 18. 45	13. 46
5/16 —	δ Hercul.	69. 41. 6	- -	22	25. 6. 25	14. 13
	α Lirae	83. 10. 7	- -	7	38. 35. 31	14. 4
	α Aquilae	52. 54. 14	- -	43	8. 15. 45	13. 47
16/27 Iul.	δ Hercul.	69. 41. 9	- -	22	25. 6. 25	14. 11
	α Lirae	83. 10. 2	- -	7	38. 35. 34	14. 12
	α Aquilae	52. 54. 11	+11. 27	43	8. 18. 47	45. 13. 52
					Medium	45′. 13. 58.

Hinc perſpicitur Latitudinem Eupatoriae rotunde 45°. 14′ absque errore ſtatui poſſe, praeſertim cum earundem ſtellarum intermediis diebus captae altitudines idem praebeant conſectarium.

Obſer-

Obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt. ♃
Die $\frac{4}{15}$ Iulii meridies verus ex altitud. ☉lis correſpond. - -	$0^h. 1'.27'',3$		
— Imm. II. Satellitis Iouis -	14. 45. 58	$14^h.44'.14''$	40°.
Aere tranquillo, coelo ſereno, faſciis Iouis optime conſpicuis.			
Die $\frac{5}{16}$ Iulii meridies verus ex altitud. Solis correſpod. -	0. 1. 55,2		
Die $\frac{13}{24}$ Iulii Merid. verus ex altitud. Solis correſpond. -	0. 8. 3,2		
— Imm. I. Satell. Iouis - -	12. 25. 31	12. 17. 4	22°.
Luna ſplendente, faſciis quidem bene conſpicuis, aſt ipſis ſatellitibus non aeque micantibus ac in obſeruatione praecedente.			
Die $\frac{14}{25}$ Iulii meridiis verus ex altitud. Solis correſpond. -	0. 8. 50,5		
Die $\frac{20}{31}$ Iul. meridies verus ex altitudinibus correſpondentibus	0. 12. 48,5		
— Imm. I. Satellitis Iouis -	14. 24. 12	14. 11. 2	43°.
Coelo ſereno, aere tranquillo, faſciis et ſatellitibus optime conſpicuis.			
Die $\frac{21 \text{ Iulii}}{1 \text{ Aug.}}$ Meridies verus ex altitudin. Solis correſpondentibus	0. 13. 26,5		

Obſeruationes iſtae ſuper Satellites Iouis habitae, aeque ac omnes reliquae inſtitutae ſunt tubo *Dollondiano* triplici vitro obiectiuo inſtructo et obiecta octogies circiter amplificante.

Die $\frac{13}{24}$ Iulii Imm. I. Satell.	10^{h}.	$57'$.	$58''$	Dresdae
	12.	17.	4	Eupatoriae.
Longit. Eupat. a Dresda	2.	19.	6	
Longit. Dresdae a Lut. Par.		45.	10	
Longit. Eupat. a Lut. Par.	2.	4.	16.	

Quodſi obſeruationes ſupra relatae conferantur cum momentis e tabulis depromptis, atque ex ternis determinationibus optime inter ſe conſentientibus $2^{h}. 4'. 30''$; $2^{h}. 4'. 17''$; $2^{h}. 4'. 23''$ ſumatur medium, differentia meridianorum Pariſienſis et Eupatorienſis prodibit $2^{h}. 4'. 23$. Parum igitur a veritate aberrabitur, ſi longitudo Eupatoriae a meridiano Pariſino computa ſtatuatur $2^{h}. 4'. 20''$ ſiue in gradibus $31^{\circ}. 5'$.

Declinatio acus magneticae Eupatoriae die $\frac{14}{25}$ Iulii obſeruata eſt $11^{\circ}. 38'$ verſus occaſum.

III.

Obſeruationes Seuaſtropoli habitae.

Seuaſtopolis eſt vrbs nouiſſime fundata in littore occidentali *Cherſoneſi Tauricae*, ad ſinum ſecuram nauibus bellicis ſtationem praebentem, non procul ab oppido *Inkerman* dicto.

Die $\frac{2}{13}$ Augusti directo tubo quadrantis in obiectum ad $1\frac{1}{2}$ Werſt. diſtans altitudo eius in ſitu recto quadrantis reperta eſt $+ 1,95$ R, et in ſitu inuerſo $+ 11,61$ Reu.; vnde concluditur error quadrantis altitudinibus obſeruatis addendus $= 4,83$ Reu. $= 11'. 21''$.

Dies

Dies obſv.	Alt. obſeru. limb. ☉ Bor	Error. quadr.	Refr. —paral.	½ Diam. ☉lis.	Decl. ☉lis Bor.	Latitudo.
25 Iulii / 5 Aug.	62°.16′.25″	+11′.21″	— 26″	15′.49″	16°.51′.41″	44°.41′.10″
26 Iul.	61. 58. 32	- -	—	- -	16. 35. 7	44. 41. 29
28 —	61. 24. 17	- -	27	15. 50	16. 1. 14	44. 41. 20
30 —	60. 49. 46	- -	27	15. 50	15. 26. 21	44. 41. 41
3/14 Aug.	59. 37. 11	- -	29	15. 51	14. 13. 33	44. 41. 21
5 Aug.	58. 11. 9	+11′.21	30	15. 52	13. 35. 51	44. 41. 10
					Medium	44. 41. 21

Altitudines Stellarum fixarum meridianae.

Dies obſv.	Nomina ſtellar.	Altitudo obſeru.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nul. et Aberr. corr.	Latitudo.
25 Iulii / 5 Aug.	α Ophiuci	57. 51. 40	+11′.21″	36″		44°.41′.37″
	μ Hercul.	72. 59. 20	- -	17		44. 41. 32
	ε Aquilae	59. 55. 17	- -	33		41. 25
	β Cygni	72. 38. 40	- -	17		41. 34
	α Aquilae	53. 26. 36	- -	42		41. 34
30 Iulii / 10 Aug.	α Ophiuci	57. 51. 42	- -	36	12°. 44′. 2″	44. 41. 35
	μ Herculis	72. 59. 32	- -	17	27. 51. 56	44. 41. 20
	ε Aquilae	59. 55. 11	- -	33	14. 47. 30	41. 31
	β Cygni	72. 38. 29	- -	17	27. 31. 18	41. 45
	α Aquilae	53. 26. 36	- -	42	8. 18. 49	41. 34
3/14 Aug.	α Ophiuci	57. 51. 49	- -	36		44. 41. 28
	μ Herculis	72. 59. 25	- -	17		44. 41. 27
	ε Aquilae	59. 55. 6	- -	33		41. 14
	β Cygni	72. 38. 34	- -	17		41. 28
	α Aquilae	53. 26. 91	+11. 21	42		41. 39
					Medium	44. 41. 31

Quam obrem Latitudo Seuaſtopolis ſtatuenda erit 44. 41. 26

Obſer-

Obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt. ♃
Die $\frac{29 \text{ Iulii}}{9 \text{ Aug.}}$ Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	$11^h.54'.16'',5$		
— Imm. I. Satell. ♃ - - coelo ſereno, faſciis tamen non ſatis diſtincte conſpicuis.	10. 28. 56	$10^h.34'.26''$	14°
— Imm. II. Satell. ♃ - coelo ſereno et faſciis optime conſpicuis.	11. 51. 25	11. 56. 53	28°
Die $\frac{30 \text{ Iulii}}{10 \text{ Aug.}}$ Meridies verus per altitudines Solis correſpond.	11. 54. 47,7		
Die $\frac{5}{16}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 58. 10		
— Imm. I. Satell. ♃ - -	12. 28. 15	12. 29. 50	32°
— Imm. II. Satell. ♃ - - vtraque immerſio obſeruata eſt coelo ſereno et faſciis diſtincte conſpicuis.	14. 34. 21	14. 35. 53	46°
Die $\frac{6}{17}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 58. 39,5		
— Imm. III. Satell. ♃ - - coelo quidem ſereno, ſed ob ſplendorem Lunae faſciis minus conſpicuis.	14. 1. 53	14. 2. 55	44°
Die $\frac{8}{19}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 59. 42,2		

Ob-

Obſeruationibus I. et II. Satellitis Iouis collatis cum momentis Immerſionum ex Calendario aſtronomico Pariſino depromtis prodibunt pro Longitudine Seuaſtopolis a Lutetia Pariſiorum ſequentes determinationes $2^h.4'.44''$; $2^h.4'.57''$; $2^h.5'.2''$; $2^h.5'.5''$; ex quibus ſumto medio prodibit pro vſu Geographico differentia meridianorum Pariſienſis et Sevaſtopolis ſatis exacte $2^h.4'.57''$ ſiue ingradibus $31^\circ.14'.15''$, de vera autem Longitudine Eupatoriae iudicium ſuſpendere licebit, donec obſeruationes cum correſpondentibus conferantur.

Die $\frac{4}{14}$ Aug. Declinatio acus magneticae obſeruata eſt $11^\circ.\ 13\frac{1}{2}'$ verſus occidentem.

IV.

Determinatio Latitudinis *Theodoſiae* alias *Keſa* dictae.

Per paucos dies commoratus eſt *Theodoſiae* Vir Cl. *Tchernoi*, et pro definienda Latitudine loci ſequentes inſtituit obſeruationes.

Dies obſv	Nomina ſtellar.	Altit. obſeruat.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nut et Aber. corr.	Latitudo.
$\frac{12}{23}$ Aug.	ε Aquilae	$59^\circ.32'.27''$	+11.21	34''	$14^\circ.47'.30''$	$45^\circ.4'.16''$
	β Cygni	72. 15. 48		18	27. 31. 22	4. 31
	α Aquilae	53. 3. 59		42	8. 18. 52	4. 14
$\frac{13}{24}$ —	ε Aquilae	59. 32. 29		34		4. 14
	β Cygni	72. 15. 51		18		4. 28
	α Aquilae	43. 3. 55	+11'.21''	42		45. 4. 16
					Medium	45. 4. 20

Die $\frac{13}{24}$ Aug. obſeruata eſt altitudo Solis meridiano proxima, et limbi illius Borealis reperta eſt 55°. 57′. 47″, quae errore quadrantis 11′. 21″, Refractione – parallaxi 34″ correcta fit 56°. 8′. 34″, et cum diameter ⊙lis ſit 15′. 53″, Declinatio vero circiter 10°. 56′. 48″ prodibit Latitudo quaeſita 45°. 4′. 7″.

Pari modo ex altitudine die ſequenti obſeruata 55°. 37′. 8″ poſita declinatione Solis 10°. 36′. 4″ elicitur Latitudo 45°. 4′. 3″. Hinc pro vſu Geographico Latitudo *Theodoſiae* rotunde ſtatui poterit 45°. 4′.

V.

Obſeruationes Ienikolae inſtitutae.

Hic denuo repetita quadrantis verificatione ad horizontem error altitudinibus obſeruatis addendus repertus eſt 11′. 32″; ſumto autem medio inter hunc et Seuaſtopoli inuentum prodit 11′. 26″,5 idem quam proxime, qui prodiit ex verificatione Eupatoriae inſtituta.

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſv.	Alt. obſeru. limb. ⊙ Bor.	Error. quadran.	Refr. – paral.	½ Diam ⊙lis.	Decl. ⊙lis Bor.	Latitudo.
$\frac{16}{27}$ Aug.	54°. 38′. 15″	+ 11′. 27″	– 36″	15′. 54″	9°. 54′. 6″	45°. 20′. 54″
21 Aug. / 1 Sept.	52. 50. 22	- -	38	15. 55	8. 6. 25	21. 9
22 —	52. 28. 39	- -	38	15. 55	7. 44. 28	20. 55
23 —	52. 6. 47	- -	39	15. 56	7. 22. 22	20 43
24 —	51. 44. 32	- -	39	15. 56	7. 0. 9	20. 45
28 Aug. / 8 Sept.	50. 14. 40	+ 11. 27	44	15. 57	5. 30. 17	45. 20. 53
					Medium	45. 20. 53.

Alti-

Altitudines Stellarum ſixarum meridianae.

Dies obſv.	Nomina ſtellar.	Altitudo obſeru.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nut. et Aberr. corr.	Latitudo.
16/27 Aug.	ε Aquilae	59°.15'.24''	+11'.27''	34		45°.21'.14''
	β Cygni	71. 58. 50	- -	18		21. 14
	α Aquilae	52. 47. 0	- -	43		21. 8
	ε Delphin.	55. 3. 20	- -	40		21. 15
17/28 Aug.	ε Aquilae	59. 15. 17	- -	34	14°. 47'. 31''	21. 21
	β Cygni	71. 58. 47	- -	18	27. 31. 23	21. 27
	α Aquilae	52. 47. 3	- -	43	8. 16. 52	21. 5
	ε Delphin.	55. 3. 17	- -	40	10. 35. 22	21. 18
21 Aug./1 Sept.	ε Aquilae	59. 15. 15	- -	34		21. 23
	β Cygni	71. 58. 43	- -	18		21. 31
	α Aquilae	52. 47. 6	- -	43		21. 2
	ε Delphin.	55. 3. 10	+11. 27	40		45. 21. 25
					Medium	45. 21. 18

Hinc concludere licet Latitudinem Ienikolae rotunde ſtatui poſſe 45°. 21'.

Obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt.
Die 21 Aug./1 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - - -	11h.45'.15'',5		
— Imm. I. Satell. ♃ - -	10. 47. 6	11h. 2'.19''	25°
Socius - -	46. 41		
coelo ſereno, aere tranquillo			
Die 22 Aug./2 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 44. 12,3		

Die

	Tempus Horol.	Tempus verum	Alt. ♃
Die 23 Aug./3 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11^h.43$'$.14$''$,2		
— Imm. II. Satell. ♃ - -	9. 9.58	9^h.26$'$.58$''$	18°
Socius - -	9. 9.25		
coelo ſereno, faſciis optime conſpicuis.			
Die 24 Aug./4 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 42. 38,8		
Die 28 Aug./8 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 39. 21,7		
— Imm. I. Satell. ♃ - -	12. 37. 45	12. 58. 46	47°
Socius - - -	37. 27		
coelo ſereno, aere tranquillo.			
Die 29 Aug./9 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 38. 32,9		
Die 30 Aug./10 Sept. Meridies verus ex altitudinib. Solis correſpond.	11. 37. 44,1		
~ Imm. II. Satell. ♃ diſtincte obſervata, coelo ſereno.	11. 43. 54	12. 6. 35	45°
Die 31 Aug./11 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - - -	11. 36. 54,6		

Iam vero obſeruata eſt

Die

Die 1 Sept. Imm. I. Satell.	9^h.	$30'$.	$52''$	Dresdae
	11.	2.	19	Ienikolae
Different. meridianorum -	1.	31.	27	
Longit. Dresdae a Lut. Paris.		45.	2	
Longit. Ienikolae ab eadem -	2.	16.	29.	
Die 28 Aug. Imm. I. Satell. ♃	10^h.	$56'$.	$32''$	Auully
	12.	58.	46	Ienikolae
Differentia meridianorum -	2.	2.	14	
Longit. Auully a Lut. Paris. -		14.	24	
Longit. Ienikolae a Lut. Paris.	2.	16.	38	
Die 30 Aug. Imm. II. Satell. ♃	10.	4.	49	Auully
	12.	6.	35	Ienikolae
Differentia meridianorum -	2.	1.	46	
Longit. Auully a Lut. Paris. -		14.	24	
Longit. Ienikolae ab eadem -	2.	16.	10.	

Sumto ex his tribus determinationibus medio prodit differentia meridianorum Pariſienſis et Ienikolenſis 2^h. $16'$. $26''$, ſiue in gradibus $34°$. $6'$. $40''$.

Die $\frac{26 \text{ Aug.}}{6 \text{ Sept.}}$ Declinatio acus magneticae obſeruata eſt $7°$. $15'$ verſus occaſum.

Inſulae Taman, cuius diſtantia a Ienikola ex traditione praefectus Ienikolae Roſenberg eſt 18 praeciſe Werſtarum, deuiatio a poſitione acus magneticae reperta eſt $23°\frac{1}{2}$ verſus ortum; vnde poſita Latitudine Ienikolae $45°$. $21'$. $6''$ Longitudine a meridiano Pariſino computata $34°$. $6'$. $30''$ prodit Latitudo inſulae Taman $45°$. $12'$. $16''$ et Longitudo $34°$. $14'$. $45''$.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES À AVULLY PRÈS DE GENÈVE.

Par
J. A. MALLET.

La longitude de l'obſervatoire d'Avully eſt de 14'. 24'' de temps à l'orient de Paris, & la hauteur du Pôle de 46°. 10'. 10''.

1°. Eclipſes des Satellites de Jupiter.

J'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie au mois de Septembre dernier 1785, le petit nombre d'obſervations d'eclipſes de Satellites de Jupiter que j'ai pû faire dans le courant de l'eté, voici celles que j'ai pû obſerver depuis lors; Elles ont été faites ainſi que les précédentes avec une lunette achromatique à triple obiectif qui groſſit 125 fois.

1785.		Temps vrai.	
Aouſt	23.	$15^h.25'.43''$	Immerſ. du 2d. S.... Obſervation excellente; j'oubliai de la joindre à celles que j'envoyai en Septembre.
Sept.	22.	14. 50. 1	Immerſ. du 1r. Sat. auſſi bonne qu'elle put être, vû la proximité où le Satellite eſt de Jupiter.

1785.

1785.		Temps vrai.	
Sept.	23.	8^h.27'.57''.	Immerſ. du 3me. Sat. Obſervation médiocre, le temps peu net : j'ai cru revoir le Satellite deux fois dans l'eſpace d'une demi minute, mais cela eſt fort douteux. L'Emerſion n'a pu être obſervée, quoique annoncée dans la Connoiſſance des Temps, le Satellite étant derriere le diſque de la Planete.
Oct.	1.	11. 15. 6.	Immerſ. du 1^r. Sat. Temps ſerein, mais l'obſervation ne peut être que très douteuſe: le Satellite paroiſſoit toucher le diſque de Jupiter.
	5.	9. 55. 16.	Emerſ. du 2^d. Sat. Je n'ai été parfaitement ſur de voir le Satellite qu'à 9^h. 56'. avant ce moment-là il diſparoiſſoit de temps en temps.
Déc.	8.	9. 24. 44.	Emerſ. du 2. Sat. Très bonne obſervation, le temps ſerein avec un leger brouillard.

2°. Occultations d'étoiles par la Lune.

1°. Le 27. Avril 1785. J'obſervai l'immerſion de l'étoile 43e. d'Ophiucus derriere la partie éclairée de la Lune à . . . . . . $13^h.20'.20'',3$ } Temps vrai.
& l'Em. de deſſous la partie obſcure à 13. 57. 57, 5 }

L'obſervation de l'immerſion eſt médiocre, parceque la Lune étoit très lumineuſe, & que l'étoile entroit fort obliquement; je dois l'avoir perdu de vue avant la véritable immerſion. L'obſervation de l'émerſion eſt très bonne.

2. Le

2°. Le 22. Juin 1785. J'obſervai l'immerſion de l'étoile φ du Sagittaire derriere la partie éclairée de la Lune à - - - - - - 12^h.28'. 1",1 } Temps vrai.
& l'émerſ. de deſſous la partie obſcure 13. 45. 47, 5 }

Ces deux obſervations ſont aſſez bonnes.

J'ai fait le calcul de cette occultation, en employant les formules & la méthode de Mr. *Lexell* pour déterminer la parallaxe, le temps de la conjonction, & l'erreur des Tables.

	Par l'immerſion.	Par l'émerſion.
Longitude vraie du ☉, par les Tables de *Mayer*	III^s. 1°.48'.19",0	III^s. 1°.51'.24",4
Aſcenſion droite du ☉	III. 1. 58. 4, 6	III. 2. 1. 26, 7
Obliquité de l'écliptique	. 23. 28. 9	
Longitude vraie de la ☾	IX. 6. 59. 43, 3	IX. 7. 44. 18, 2
Latitude vraie de la ☾, auſtrale .	. 3. 0. 51, 9	2. 57. 35, 1
Mouvement horaire de la ☾ en longitude	. . 34. 23, 2	. . 34. 25, 2
Mouvement horaire de la ☾ en latitude qui va en diminuant	. . 2. 31, 3	. . 2. 32. 9
Parallaxe horizontale équator. de la ☾	. . 58. 22, 7	. . 58. 24, 4
Diametre horizontal de la ☾ . . .	. . 31. 49, 0	. . 31. 50, 1
Diametre augmenté	. . 31. 58, 7	. . 31. 58, 7
Parallaxe de longitude, dont la longit. vraie de la ☾ eſt diminuée . .	. . 3. 51, 5	. . 17. 6, 6
Parallaxe de latitude, dont la latit. vraie de la ☾ eſt augmentée . . .	. . 55. 36, 0	. . 53. 43, 0
Longitude apparente de l'étoile φ, tirée du Catalogue de *Bradley* . . .	IX. 7. 11. 26, 5	. . . . . .
Latitude apparente auſtrale . . .	. 3. 55. 6, 0	. . . . . .

Réſul-

Réſultat.

Par l'immerſion la conjonction a eu lieu le 22 Juin à

$12^h. 49'. 10''. 1 + 1'', 750\,\delta - 0'', 129\,\eta - 0'', 240\,\pi$

Par l'émerſion à

$12^h. 48'. 50'', 4 - 1'', 797\,\delta - 0'', 429\,\eta - 0'', 905\,\pi$

Par un milieu entre les deux obſervations à

$12^h. 49'. 0'', 2 - 0'', 023\,\delta - 0'', 279\,\eta - 0'', 572\,\pi$

Erreur des Tables de *Mayer* qui donnent la longitude de la Lune trop grande { de $24'', 0 + 0, 57\,\Phi''$ par l'imm. / de $13'', 6 - 0, 57\,\Phi''$ par l'ém.

J'employe ici les mêmes lettres que Mr. *Lexell*, c'eſt à dire, que δ eſt la correction à faire au demi-diametre de la Lune; η la correction de la latitude des Tables; π la correction de la parallaxe horizontale équatorienne; & Φ'' le changement qui réſultera ſur le temps de la conjonction, lorsque les quantités δ, η, & π ſeront déterminées.

Si on veut faire uſage des deux obſervations enſemble & employer la méthode indiquée dans l'Aſtronomie de Mr. *de la Lande*, on trouve les réſultats ſuivans. Le temps vrai de la conjonction à $12^h. 49'. 15''$; l'erreur des Tables de *Mayer* en longitude, trop grande de $27''$; l'erreur des Tables de *Mayer* en latitude, trop grande de $55''$.

3°. Le 22. Octobre 1785, j'obſervai l'occultation de l'étoile ε des Gémaux par la partie éclairée de la Lune, très bonne, à $10^h. 58'. 49'', 6$ temps vrai; & l'émerſion de la partie obſcure, excellente obſervation, à $11^h. 55'. 34'', 9$ temps vrai.

3°. Oppoſition de Saturne en 1785.

J'ai obſervé cette oppoſition & les ſuivantes de la même maniere, & avec les mêmes inſtrumens, que celles que j'eus l'honneur de faire parvenir l'année derniere à l'Académie : j'ai eu pour Aide comme ci-devant, Mr. *Marc Pictet* qui m'a été fort utile.

Les poſitions des 6 étoiles auxquelles Saturne a été comparé le 24, 25 & 26 Juillet, ſont tirées des Catalogues de *Bradley* & de *Mayer*. J'ai cru devoir rejetter la déclinaiſon déduite de l'obſervation de σ du Capricorne, ce réſultat ne s'accordant point avec les autres ; j'ai de même rejetté pour le 26 la déclinaiſon déduite de l'étoile voiſine de π du Sagittaire.

1785. Juillet	Noms des étoiles.	Aſcenſions droites apparentes des étoiles.	Declinaiſons app. des étoiles auſtrales.	Aſcenſ. droites appar. de ♄ déduites des obſerv.	Déclin. appar. de ♄ déduites des obſervat. auſtrales.	Temps vrai des paſſages de Saturne au méridien, au quel ſont rapportées toutes les obſervations.
	étoile près Φ du Sag.	278°.20'.57'',0	19°.48'.45'',9	304°.26'.15''	20°.12'.26''	
	1 ξ du Sagitt.	281. 9. 31,1	20. 55. 8,5	. . 15	. . 17	
	près π du Sag.	284. 17. 53,0	20. 7. 24,9	. . 14	. . 19	
24.	*d* du Sagitt.	286. 16. 52,1	19. 19. 3,4	. . 17	. . 23	
	f du Sagitt.	293. 28. 18,1	20. 15. 35,4	. . 16	. . .	
	σ du Capric.	301. 45. 39,2	19, 46. 20, 2	. . 11	rejettée 36	
			moyenne -	304°.26'.15''	20°.12'.21''	11h.59'.21''

1785. Juillet	Noms des étoiles.	Aſcenſions droites apparentes des étoiles.	Déclinaiſons apparentes des étoiles auſtrales.	Aſcenſ. droites appar. de ♄ déduites des obſerv.	Déclin. appar. de ♄ déduites des obſervat. auſtrales.	Temps vrai des paſſages de Saturne au méridien, au quel ſont rapportées toutes les obſervations.
	près Φ du Sag.	. . . .	. . . . .	304°.21′.40″	20°.13′.37″	
	1 ξ du Sag.	. . . .	. . . .	. . 34	. . 36	
25.	près π du Sag.	. . . .	. . . . .	. . 42	. . 27	
	d du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 39	. . 28	
	f du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 40	. . .	
	σ du Capric.	. . . .	. . . . .	. . 35	rejettée 1	
			moyenne -	304°.21′.38″	20°.13′.32″	11^h.55′. 8″
	près Φ du Sag.	. . . .	. . . . .	. . . . .	20°.14′.23″	
	1 ξ du Sag.	. . . .	. . . . .	304°.17′. 8″	. . 13	
26.	près π du Sag.	. . . .	. . . . .	. . 5	rejettée 10	
	d du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 3	. . 26	
	f du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 7	. . 25	
	σ du Capric.	. . . .	. . . . .	. . 1	rejettée 36	
			moyenne -	304°.17′. 5″	20°.14′.22″	11^h.50′.54″

Réſultat.

1785. Juillet	Temps moyen à Paris.	Longit. géoc. de ♄ déduite des obſervations.	Longit. géoc. de ♄ calculée par les Tab. de Halley.	Erreur des Tabl. en longit. géocent.	Latit. géoc. de ♄ déduit. des obſerv. auſtrales.	Latit. géoc. de ♄ calculée par les Tables.	Erreur des Tab. en latit. géocent	Erreur des différentes Tables, en longitude héliocent. au temps de l'oppoſition.
24.	11^h.50′.59″	X^s.2°. 3′.16″	X^s.1°.48′.41″	— 14′.35″	0°.29′.39″	0°.30′. 2″	+ 23″	T. de Halley — 13′. 5″
25.	11. 46. 47	X. 1. 58. 46	X. 1. 44. 15	— 14. 31	0. 29. 50	0. 30. 7	+ 17	T. de Caſſini + 7. 21
26.	11. 42. 34	X. 1. 54. 26	X. 1. 39. 49	— 14. 37	0. 29. 41	0. 30. 15	+ 34	T. de la Lande + 7. 12
			moyenne	— 14. 34		moyenne	+ 25	

Le 24. | 5. 41. 0 { Longitude vraie ſur l'Ecliptique, de Saturne en oppoſition X^s. 2°. 3′. 58″.
Latitude géocentrique auſtrale - - - - - - - 0. 29. 36.

4°. Oppoſition de Jupiter en 1785.

Cette Planete a été comparée le 1. 4. & 5. Octobre aux étoiles β, γ, & 19e. des Poiſſons. J'ai lieu de croire que l'aſcenſion droite de γ priſe dans le Catalogue de *Mayer*, eſt d'environ 19″ trop petite, le réſultat de l'obſervation de cette étoile ſe trouvant différer des autres à peu près de cette quantité pour les trois jours d'obſervations.

1785. Oct.	Noms des étoiles.	Aſcenſions droites apparentes des étoiles.	Déclin. appar. des étoiles boréales.	Aſcenſ. droites appar. de Jupiter déduites des obſerv.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervat. boréal.	Temps vrai des paſſages de Jupiter au méridien, auquel ſont rapportées toutes les obſervations.
1.	γ. des Poiſſons	346°.31′.16″,2	2°. 7′. 9″,4	9°.29′.41″ rejetté	2°.18′.27″	
	19e des Poiſſons	353. 52. 25, 8	2. 18. 11, 6	9. 30. 4	2. 18. 30	
			moyenne	9. 30. 4	2. 18. 28	12^h. 4′.21″
4.	β. des Poiſſons	343. 15. 13, 0	. . .	9. 7. 42	2. 8. 58	
	γ. des Poiſſons	346. 31. 15, 7	. . .	rejet. 26	2. 9. 0	
	19e des Poiſſons	353, 52. 25, 7	. . .	. . 48	2. 9. 3	
			moyenne	9. 7. 45	2. 9. 0	11^h.51′.59″
5.	β. des Poiſſons	343. 15. 12, 9	. . .	9. 0. 17	2. 5. 44	
	γ. des Poiſſons	346. 31. 15, 6	. . .	rejet. 0	. . 56	
	19e des Poiſſons	353. 52. 25, 5	. . .	. . 21	. . 52	
			moyenne	9. 0. 19	2. 5. 51	11^h.47′.51″

Réſultat.

1785. Oct	Temps moyen à Paris.	Longit. géoc. de Jupiter déduite des obſervat.	Longit. géoc. de Jupiter calculée par les T. de Halley.	Erreur des T. en long. géoc.	Latit. géoc. de Jupiter déduite des obſ. auſtr.	Latit. géoc. de Jupiter calc. par les Tables.	Erreur des Tables en lat. géo.	Erreur des longitudes héliocent. des différentes Tables, au moment de l'oppoſition.
1.	11^h.39′.17″	0.9°.38′.11″	0°.9°.37′.53″	— 18″	1°.38′.46″	1°.39.10″	+ 24″	T. de Halley — 13″
4.	11. 26. 1	0. 9. 13. 57	0 9. 13. 41	— 16	1. 38. 42	1. 39. 8	+ 26	T. de Caſſini — 5′.11
5.	11. 21. 36	0. 9. 5. 53	0. 9. 5. 39	— 14	1. 38. 41	1. 39. 7	+ 26	T. de la Lande + 4′. 37
			moyenne	— 16		moyenne	+ 25	

Le 1^r. 22^h. 7′. 0″ { Longitude vraie ſur l'Ecliptique de Jupiter en oppoſition 0 . 9 . 34′. 52″.
Latitude géocentrique auſtrale . . . . 1. 38. 45.

5°.

5°. Oppoſition d'Uranus en 1786.

Le mauvais temps ne m'a permis d'obſerver cette Planete près de ſon oppoſition, que deux fois, le 8 & le 14 Janvier, elle a été comparée à dix etoiles toutes ſituées très près de ſon parallele.

1786. Janv.	Noms des étoiles.	Aſcenſions droites appar. des étoiles.	Déclinaiſ. appar. des étoiles boréales.	Aſcenſ. droites appar. d'Uranus déduites des obſervat.	Déclin. appar. d'Uranus déduites des obſervat. boréal.	Temps vrai des paſſages d'Uranus au méridien, auquel on rapporte toutes les obſervat.
	λ. du Bélier	26°.31'. 3",5	22°.32'.54",2	110°.35'.35"	22°.36'. 8"	
	α. du Bélier	28. 47. 23, 5	22. 26. 50, 9	rejett. 18	. . 19	
	ν. du Taureau	63. 23. 19, 6	22. 19. 1, 0	rejett. 20	. . 15	
	τ. du Taureau	67, 21. 54, 1	22. 32. 1, 8	. . 29	. . 15	
	H. des Gém.	87. 47. 22. 6	23. 15. 37, 0	. . 34	. . 19	
8.	η. des Gém.	90. 30. 5, 5	22. 33. 11, 5	. . 36	. . 23	
	μ. des Gém.	92. 30. 45, 7	22. 36. 31, 7	. . 30	. . 21	
	d. des Gém.	99. 41. 22. 8	21. 59. 52. 9	. . 37	. . 7	
	ω. des Gém.	103. 6. 50, 9	22. 56. 34, 4	. . 33	. . 14	
	δ. des Gém.	106.50. 37, 9	22. 21. 38, 0	rejett. 43	. . 9	
			moyenne	110. 35. 33	22. 36. 15	12h. 0'. 8"
	λ. du Bélier	26°.31'. 2",1	. . . . .	110. 19. 2	22. 38. 25	
	α. du Bélier	28. 47. 22, 1	. . . . .	rej. 18. 46	. . 20	
	ν. du Taureau	63. 23. 18, 5	. . . . .	. . 51	. . 29	
	τ. du Taureau	67. 21. 53, 5	. . . . .	. . 59	. . 31	
14.	H. des Gém.	87. 47. 22. 6	. . . . .	. . 55	. . 28	
	η. des Gém.	90. 30. 5, 7	. . . . .	. . 58	. . 29	
	μ. des Gém.	92. 30. 45, 9	. . . . .	. . 54	. . 28	
	δ. des Gém.	106.50. 38, 5	. . . . .	. . 58	. . 25	
			moyenne	110°.18'.55"	22°.38'.27"	11h.33'.10"

Ré-

Réſultat.

1785. Janv.	Temps moyen à Paris.	Longitude géoc. d'Uranus tirée de l'obſervat.	Longitude géoc. d'Uranus calc. par les Tabl. des Conn. des T. 1787	Erreur des T. en long. géoc.	Latit. géoc. d'Uranus tirée de l'obſervat.	Latit. géoc. d'Uranus calcul. par les Tables.	Erreur des T. en latit. géocent	Lieu du Soleil calculé par les Tables de Mayer.
8.	11^h.53′ 18″	III^s.18°.56′.54″	III^s.18°.57′.11″	+ 17″	0°. 29′. 1″	0°.28′.48″	− 13″	IX^s.18°.59′.15″,3
14.	11. 28. 38	III. 18. 41. 25	III. 18. 41. 36	+ 11	0. 29. 4	0. 28. 47	− 17	IX. 25. 4. 46, 5
			moyenne	+ 15		moyenne	− 14	

Le 8. | 10^h.50′. 0″ { Longitude vraie ſur l'écliptique d'Uranus en oppoſition III^s. 18°. 56′. 34″
Latitude géocentrique boréale . . . . 0. 29. 2.

SPE-

SPECIMEN
TABVLAE VSVI NAVTICO ACCOMMODATAE PRO INVENIENDA VERA
LVNAE A STELLA VEL SOLE DISTANTIA
EX OBSERVATA VTRIVSQVE ALTITVDINE ET DISTANTIA APPARENTE.

Auctore
W. L. KRAFFT.

In noviſſima editione Tabularum, (*) quas pro Calendarii nautici vſu edidit Collegium Londinenſe rei longitudinariae praefectum, Cel. *Maskelyne* regulam tradidit et perelegantem et rigori geometrico perfecte conformem, ex obſeruatis Lunae et Stellae Solisue altitudinibus earumque diſtantia apparente inueniendi veram earundem diſtantiam, a parallaxis et refractionis effectibus liberam, cuius cum demonſtrationem mihi quaererem, accidit, vt inſuper alia ſe mihi offerret regula, quae *Maskelynianae* analoga, id commodi habere videbatur, vt non ipſum modo calculum ad operationes reduceret paulo pauciores, ſed etiam tabulam ſuppeditaret et conſtructionis et applicationis facillimae, qua mediante calculus omnis ſolis Logarithmis abſolui-

(*) Tables requiſite to by uſed with the nautical ephemeris, the II. Edit. 1781.

ſolvitur, abſque eo, vt continuam eorundem tractationem vel numeri vllius abſoluti vel anguli cuiusdam ſubſidiarii euolutione interrumpere opus ſit. Neque tamen, cum ſolutio huius problematis primaria ex ipſis Trigonometriae Sphaericae regulis immediate obuia, facili transformatione adhibita, omnium ſimpliciſſima iure videatur, regulae, quam reperi, exponendae hic immorarer, niſi ex methodorum pro ſoluendo hoc problemate a pluribus Geometris datarum numero et varietate, tabularumque hunc in finem conſtructarum multiplici labore iure concludi poſſe videretur, quicquid ad hunc calculum aſtronomis nauticis facilitandum aliquid conferre poſſit, attentione indignum cenſeri nihil. Praemiſſa igitur regulae *Maskelynianae* demonſtratione, qualem mihi concinnaui, aliam analogam, de qua dixi, tabulaeque huic ſuperſtructae ſpecimen aliquod et vſum exponam.

Si fuerit

altitudo appar. centri ☾ $= h$; vera $= H$

altit. app. centri ☉ vel ſtellae $= h'$; vera $= H'$

diſtantia centr. appar. $= d$; vera $= d'$.

et angulus inter verticales Lunae et ſideris ad Zenith interceptus $= Z$;

conſtat ex principiis Trigonometriae ſphaericae, eſſe

$$\text{coſ.}\, Z = \frac{\text{coſ.}\, d - \text{ſin.}\, h \,.\, \text{ſin.}\, h'}{\text{coſ.}\, h \,.\, \text{coſ.}\, h'} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, d' = \text{ſin.}\, H \,.\, \text{ſin.}\, H' + \text{coſ.}\, H \,.\, \text{coſ.}\, H' \,.\, \text{coſ.}\, Z,$$

quae poſterior aequatio ob $\text{coſ.}\, Z = 1 - 2 \,.\, \text{ſin.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2$, vel $\text{coſ.}\, Z = 2 \,.\, \text{coſ.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 - 1$, poſitoque $H + H' = \eta$ et $H - H' = \theta$

praebet

praebet

$$\text{coſ.}\, d' = \text{coſ.}\, \theta - 2 \,.\, \text{ſin.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 \,.\, \text{coſ. H} \,.\, \text{coſ. H}',$$

vel etiam

$$\text{coſ.}\, d' = 2 \,.\, \text{coſ.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 \,.\, \text{coſ. H} \,.\, \text{coſ. H}' - \text{coſ.}\, \eta.$$

Ex priori vero aequatione, poſito $h + h' = T$ et $h - h' = t$ colligitur:

$$\text{ſin.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 = \frac{\text{ſin.}\, \frac{d+t}{2} \,.\, \text{ſin.}\, \frac{d-t}{2}}{\text{coſ.}\, h \,.\, \text{coſ.}\, h'} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 = \frac{\text{coſ.}\, \frac{d+T}{2} \,.\, \text{coſ.}\, \frac{d-T}{2}}{\text{coſ.}\, h \; \text{coſ.}\, h'}$$

ita, vt poſito

$$\text{ſin.}\, \frac{d+t}{2} \,.\, \text{ſin.}\, \frac{d-t}{2} = k,$$

$$\text{coſ.}\, \frac{d+T}{2} \,.\, \text{coſ.}\, \frac{d-T}{2} = \lambda, \text{ et}$$

$$\frac{\text{coſ. H} \,.\, \text{coſ. H}'}{\text{coſ.}\, h \; \text{coſ.}\, h'} = \mu,$$

habeatur

$$\text{coſ.}\, d' = \text{coſ.}\, \theta - 2\, k\, \mu$$

vel etiam

$$\text{coſ.}\, d' = 2\, \lambda\, \mu - \text{coſ.}\, \eta.$$

Binarum harum formularum, quae, calculi operationes quod attinet, ad idem redeunt, prior tamen poſteriori antecellit, cum ob angulum θ 90 gradibus ſemper minorem et quantitatem k ſemper poſitiuam nulla diſtinctionis caſuum neceſſitate impediatur, quae ob angulum η 90 gradibus modo maiorem modo minorem, et quantitatem λ modo poſitiuam modo negatiuam multiplex eſt in poſteriori formula; quam ſine dubio ob cauſſam formula

$$\text{coſ.}\, d' = \text{coſ.}\, \theta - 2\, k\, \mu,$$

a Cel. *Dunthorne* in vſum nauticum fuit introducta et tabulis ſubſidiariis valores μ pro ſingulis Lunae altitudinibus apparentibus variaque eius parallaxi horizontali exhibentibus munita. Atque ob hanc ipſam rationem, quod quantitas $k\,\mu$ ſemper ſit poſitiua, nec vnitatem vnquam excedere poſſit, haec formula aliam transformationem admittit; poſito enim $k\,\mu = (\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi)^2$ erit $2\,k\,\mu = 1 - \text{coſ.}\,\Phi$; et $1 + \text{coſ.}\,d' = \text{coſ.}\,\vartheta + \text{coſ.}\,\Phi$; ex quo colligitur:

$$(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,d')^2 = \text{coſ.}\,\frac{\vartheta + \Phi}{2}\,.\,\text{coſ.}\,\frac{\vartheta - \Phi}{2};$$

quae eſt ipſa illa regula exacte vera et perquam concinna, quam Cel. *Maskelyne* loco citato dedit atque ideo *Dunthornianae* antetulit, quod haec ipſius coſinus naturalis numeros abſolutos implicet, quos calculatoribus nauticis haud parum impedimenti faceſſere aſſerit, illa vero meris Logarithmis abſoluatur nec niſi vnius anguli ſubſidiarii euolutionem poſtulet.

Quodſi iam ſimili ratiocinio perpendamus, non ſolum valorem $k\,\mu$, ſed etiam valorem $\frac{k\,\mu}{\text{coſ.}\,\vartheta}$ eſſe ſemper poſitiuum nec vnitatem vnquam excedere poſſe: ponere licebit $\frac{k\,\mu}{\text{coſ.}\,\vartheta} = (\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi)^2$, vnde ob $2\,k\,\mu = 2\,(\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi)^2\,.\,\text{coſ.}\,\vartheta$ colligitur expreſſio ſimpliciſſima

$$\text{coſ.}\,d' = \text{coſ.}\,\vartheta\,.\,\text{coſ.}\,\psi.$$

Quae formula, a diſtinctione caſuum aeque libera, calculi operationibus paulo paucioribus abſoluitur, et cum non, vti regula *Maskelyniana*, ſummam et differentiam anguli ϑ et ſubſidiarii ψ, ſed ſimplicem angulum ſubſidiarium ψ inuoluat, facili opera ad tabulam reuocari poteſt adplicationis aeque facilis.

Quodſi

Quodſi igitur hoc qualecunque compendium ad nauticum vſum forte quid facere poſſe videatur; breuiter hic expoſuiſſe iuuabit eas tabulae huic formulae ſuperſtructae particulas, quae exemplis in libro citato exhibitis computandis inſeruiunt.

Argumentum.	Logar. correſp.	Interpolatio.
9, 2554100	9, 8061027	0, 5631. *a*
9, 2556794	9, 8059510	
⋮	⋮	
9, 6801284	8, 6279484	22, 6679. *a*
9, 6802600	8, 6249653	
⋮	⋮	
9, 7019914	7, 8439338 −	141, 3756. *a*
9, 7021168	7, 8616623 −	

vbi *a* denotat differentiam inter argumenta tabulae et exempli.

Exempl. I.

Obſeruata ſit altitudo apparens centri Lunae 12°. 30′ $= h$, et ſtellae 24°. 48′ $= h'$ cum diſtantia vtriusque apparente 51°. 28′. 35″ $= d$, exiſtente parallaxi Lunae horizontali 56′. 15″. pro quo exemplo inuenitur diſtantia vera

ex formula *Maskelyniana* $d' = 51°. 9'. 50''$
ex ipſis principiis trigonometr. $d' = 51. 9. 54$

Secundum regulam hic traditam calculus continua Logarithmorum additione ſequenti modo abſoluitur: Anguli ad calculum neceſſarii ſunt ſequentes:

$d =$

$d = 51°. 28'. 35''$	$h = 12°. 30'$	$H = 13°. 20'. 42''$
$t = 12. 18$	$h' = 24. 48$	$H' = 24. 45. 57$
$\frac{d+t}{2} = 31. 53. 17$		$H - H' = 11. 25. 15$
$\frac{d-t}{2} = 19. 35. 17$		

quibus angulis inuentis capiantur et addantur ſequentes Logarithmi:

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. ſin.} \frac{d+t}{2} = & 9,7228522 \\
\text{L. ſin.} \frac{d-t}{2} = & 9,5253813 \\
\text{L. ſec.}\ h = & 0,0104185 \\
\text{L. ſec.}\ h' = & 0,0420206 \\
\text{L. coſ. H} = & 9,9881209 \\
\text{L. coſ. H}' = & 9,9580990 \\
\text{L. ſec. (H} - \text{H}') = & 0,0086856 \\
\hline
\text{Argum.} = & 9,2555781 \\
\text{Arg tabulae proximum} = & 9,2554100 \\
\hline
\text{dat diff.}\ a = & 0,0001681. \\
\text{et Log. correſp. tab.} = & 9,8061027 \\
\text{adde Log. coſ. (H} - \text{H}') = & 9,9913144 \\
\hline
& 9,7974171 \\
\text{Subtrahe part. Interpolat} & 946 \\
\hline
\text{erit Log. coſ.}\ d' = & 9,7973225 \\
\text{et}\ d' = & 51°.\ 9'.\ 53''.
\end{array}
$$

Exempl. 2.

Obſeruata ſit altitudo apparens centri Lunae $5°.17' = h$, et Solis $= 84°.\ 7' = h'$ cum diſtantia vtriusque apparente 90°.

90°. 21′. 13″ = d, exiſtente parallaxi Lunae horizontali 1°. 1′. 48″ pro quo exemplo inuenitur diſtantia vera

ex formula *Maskelyniana* 89°. 29′. 20″
ex ipſis principiis trigonom. 89. 29. 36

Anguli ad calculum neceſſarii ſunt ſequentes:

d = 90°. 21′. 13″	h = 5°. 17′	H = 6°. 9′. 4″
t = 78. 50	h = 84. 7	H′ = 84. 6. 54
$\frac{d+t}{2}$ = 84. 55. 36		H − H′ = 77. 57. 50
$\frac{d-t}{2}$ = 5. 45. 36		

L. ſin. $\frac{d+t}{2}$ = 9, 9982952
L. ſin. $\frac{d-t}{2}$ = 9, 0015676.
L. ſec. h = 0, 0018490
L. ſec. h' = 0, 9892626.
L. coſ. H = 9, 9974926
L. coſ. H′ = 9, 0108598
L. ſec.(H−H′) = 0, 6808354

Argumentum. = 9, 6801622
Arg. tabulae proximum = 9, 6801284

dat differ. a = 0, 0000338
et Log. correſpond. tab. = 8, 6279484
adde Log. coſ. (H − H′) = 9, 3191646

7, 9471130
Subtr. part. Interpol. 7661

erit Log. coſ. d' = 7, 9463469
et d' = 89°. 29′. 36″.

Exempl. 3.

Obſeruata ſit altitudo apparens centri Lunae 88°. 46′ $= h$, et ſtellae $= 5°. 6' = h'$ cum diſtantia vtriusque apparente 89°. 58′. 6″ $= d$; exiſtente parallaxi Lunae horizentali = 1°. 1′. 18″. In quo caſu inuenitur diſtantia vera

ex formula *Maskyl.* $d' = 90°. 2'. 26''$

ex ipſis princ. trigon. $d' = 90. 2. 38.$

Anguli ad calculum neceſſarii ſunt ſequentes:

$d =$	89°. 58′. 6″	$h =$	88°. 46′	H =	88°. 47′. 17″
$t =$	83. 40. 0	$h' =$	5. 6	H′ =	4. 56. 16
$\frac{d+t}{2} =$	86. 49. 3			H − H′ =	83. 51. 1
$\frac{d-t}{2} =$	3. 9. 3				

L. ſin. $\frac{d+t}{2}$ = 9, 9993296

L. ſin. $\frac{d-t}{2}$ = 8, 7400836

L. ſec. h = 1, 6670757

L. ſec. h' = 0, 0017228

L. coſ. H = 8, 3253217

L. coſ. H′ = 9, 9983852

L. ſec. (H − H′) = 0, 9701014

Argumentum = 9, 7020200

Arg. tabulae proximum = 9, 7019914

dat differ. a = 286

et Logar. correſp. tab. = 7, 8439338 −

adde Log. coſ. (H − H′) = 9, 0298986

adde part. Interpot. = 40432

erit Log. coſ. d' = 6, 8778756 −

angul.

angul. reſpond. $= 89°. 57'. 22''$
complem. ad $180° = d' = 90°. 2'. 38''$

quae exempla tabulae memoratae indolem et vſum ſatis ſuperque demonſtrant, cuius ceteroquin vel neceſſitatem vel vtilitatem aſtronomorum nauticorum iudicio relinquo.

Tandem et id addere lubet, methodo, quam protulit Illuſtr. *de Borda*, ſimilem transformationem applicari poſſe, cuius ope ea aeque fere, ac ſuperior, conſtruendis tabulis apta reddatur. Iſta vero methodus immediate ex ſuperiori hoc modo deriuatur: cum ſit

$$\text{coſ.}\, d' = \text{coſ.}\, \vartheta - 2k\mu;\ \text{habebitur}$$
$$1 + \text{coſ.}\, d' = 2\,.\,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\vartheta^2 - 2k\mu,\ \text{ſiue}$$
$$(\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} d')^2 = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\vartheta^2 - k\mu.$$

Si igitur capiatur angulus A talis, vt ſit ſin. $A^2 = \frac{k\mu}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\vartheta^2}$, erit coſ. $\frac{1}{2} d' =$ coſ. A . coſ. $\frac{1}{2}\vartheta$, vnde etiam facili labore tabula conſtrui poterit, cuius argumentum ſit $l\,\frac{k\mu}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}\vartheta^2}$, et quae exhibeat Log. coſ. A, ad quem addito log. coſ. $\frac{1}{2}\vartheta$ habebitur Log. coſ. $\frac{1}{2} d'$; in qua tamen cum dimidium reperiatur anguli quaeſiti, et error, ex vſu praeſertim tabulae cuiusdam ſubſidiariae, veluti pro valoribus μ, metuendus in ipſa diſtantia tota duplicetur; prior formula ſupra data coſ. $d' =$ coſ. ϑ . coſ. ψ huic hoc reſpectu antecellere videtur.

EPI-

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXXII. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1782.

Menſe	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Alt. med.
	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 52	14. IX. p. m.	27. 04	3 VIII. p.m.	1 48.	27. 78	27. 76
Februar.	28 58	15. meridie.	27. 33	27 VIII. a. m.	1. 25.	27 95	28. 16
Mart.	28. 57	28. IX. p. m.	27. 11	6. meridie.	1. 46.	27. 84	27. 88
April.	28. 69	7. X. a. m.	27. 75	17. VI. p. m.	0. 94.	28. 22	28. 16
Maii	28. 32	24 med. noct.	27. 70	21. VIII. p.m. 22. VII. a. m.	0. 62	28. 01	28. 02
Iunii	28. 24	15 21 } III. a. m.	27. 66	16. med. noct.	0. 58.	27. 95	28. 01
Iulii	28. 28	10. meridie.	27. 44	4. IV. a. m.	0. 84.	27. 86	27. 96
Auguſti	28. 14	8. IX p. m	27. 40	29. II. p. m	0. 74.	27. 77	27. 89
Sept.	28. 51	6. X. a. m.	27. 57	20. VI. a. m.	0. 94.	28. 04	28. 12
Octobr.	28. 3[illegible]	26. IX. p. m.	27. 31	[illegible]0. III. a. m.	1. 01.	27. 81	27. 90
Nouembr.	28 77	30. p. m.	27. 38	16. IX. p. m.	1. 39.	28 07	28. 23
Decembr.	28. 81	2 med. noct.	27. 10	28. VI. a. m.	1. 71.	27. 95	28. 20
Anno 1782.	28. 81	Menſe Decembris.	27. 04	Menſe Ianuarii	1. 77.	27. 92	28. 04

2. Nu-

2. Numerus dierum, quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, hor.	ſupra 28. 10 Dies, hor.	ſupra 28. 00 Dies, hor.	ſupra 27. 90 Dies, hor.	ſupra 27. 80 Dies, hor.	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	1. 9	3. 21	6. 0	9. 21	15. 0	27. 78
Febr.	13. 0	18. 18	21. 3	22. 21	24. 15	28. 19
Mart.	5. 0	7. 3	10. 9	13. 9	18. 0	27. 86
April.	11. 18	17. 0	22. 18	26. 9	29. 9	28. 12
Maii	5. 9	10. 9	19. 12	24. 9	29. 9	28. 06
Iunii	1. 18	10. 3	17. 6	22. 15	28. 18	28. 03
Iulii	1. 18	7. 15	16. 9	20. 15	25. 18	28. 02
Aug.	0. 0	2. 18	9. 21	15. 18	22. 21	27. 92
Sept.	9. 18	17. 9	21. 3	24. 21	27. 12	28. 12
Oct.	1 21	6. 9	13. 9	17. 15	20. 18	27. 94
Nou.	17. 9	18. 21	21. 15	23. 18	26. 0	28. 29
Dec.	18. 9	18 15.	19. 6	12. 0	21. 21	28. 53
Anno 1782.	87. 9	138. 21	199. 15	243 3	288. 21	28. 03

Monendum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices deſignare integros, quorum duodecim pedem pariſinum regium conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius digiti; tum *a. m.* ſignificare horam antemeridianam et *p. m.* poſtmeridianam.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo Barometri maxima 28. 81, menſe Decembr. die 2da media nocte. Therm. 172, coelum obductum, Auſter.

2. Altitudo Barometri minima 27. 04, menſe Ianuarii die 3^{a} hora veſpertina 8va. Therm. 160, coelum obductum, nix copioſa, Auſter.

3. Va-

3. Variatio maxima 1, 77 vel $1\frac{77}{100}$ poll.
4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27, 92.
5. Altitudo media inter omnes obſeruatas 28, 04.
6. Mercurius in tubo barometrico commorabatur ſupra

28. 20, per dies $87\frac{1}{8}$
28. 10, per dies $138\frac{7}{8}$
28. 00, per dies $199\frac{5}{8}$
27. 90, per dies $243\frac{1}{8}$
27. 80, per dies $288\frac{7}{8}$

vnde concludere licet, mercurium per interuallum dimidii anni, vel $182\frac{1}{2}$ dierum ſe in tubo Barometri ſuſtentaſſe ſupra altitudinem 28, 03, quae parum ab altitudine media pro hoc anno inuenta differt.

Aſcenſus et Deſcenſus Mercurii in tubo Barometri notabiliores.

NB. Signa + et −, quae differentias altitudinum barometricarum praecedunt, aſcenſius vel deſcenſus mercurii indicant.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff. hor.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmoſphaera.
Ianuar.	1. med. noct.		28,00		W fort.	167	coel. nubil.
		24		− 28			
	2. med. noct.		27,72		S fort.	167	coel. obd. nix copioſa
		20		− 68			
	3. 8. p. m.		27,04			159	nix.
		24		+ 65			
	4. 8. p. m.		27,69		NO	185	coel. ſeren.
	6. 8. a. m.		27,53		N fort.	203	coel. nebul.
		19		+ 38			
	7. 3. a. m.		27,91		W fort.	179	coel. ſeren.
	7. 8. p. m.		27,78		W fort.	163	coel. obduct.
		16		− 46			
	8. meridie		27,32		SW f. f.	162	nix copioſa coel. obd.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff.	Barom. Dig. p. c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom	Atmoſphaera.
Ianuar.	8. med. noct.	21	27,27	+44	SW fort.	163	coel. nubil.
	9. 9. p. m.		27,71		SW	158	coel. ſeren.
	10. med. noct.	20	27,60	+76	S f. f.	149	pluuia, coel. obd.
	11. 8. p. m.	40	28,36	−50	N	166	coel. ſeren.
	13. meridie	33	27,86	+66	W	150	coel. obductum.
	14. 9. p. m.	39	28,52	−50	W	158	coelum obductum.
	16. meridie		28,02		S	163	coel. obd.
	22. 8. a. m.	16	27,61	+28	S fort.	149	coel obd. nix et pluuia.
	22. med. noct.	20	27,89	+48	S	154	coel. obduct.
	23. 8. p. m.		27,41		S fort.	151	nix, coel. obduct.
	24. 10. a. m.	14	27,62	−45	W	160	coel nubil.
	24. med. noct.	15	27,17	+38	W fort	151	nix cop., coel. obd.
	25. 3. p. m.		27,55		NW	152	coel. obd.
Febr.	9. 3. p. m.	23	28,32	−44	W	168	nix, coel. obd.
	10. 2. p. m.		27,88		W	165	coel. obd.
	16. meridie		28,53		malacia.	195	nebula, coel. ſeren.
	– med. noct.	24	28,40	−65	malacia.	197	coel. ſeren.
	17. med. noct.		27,75		W	165	nix cop., coel. obduct.
	18. meridie	36	27,62	+72	NW	159	nix, deinde coel. ſeren.
	19. med. noct.	33	28,34	−61	N	190	coel. ſeren.
	21. 9. a. m.	37	27,37	+63	O	168	nix, coel. obd. deinde ſer.
	22. 10. p. m		28,36		SO	174	coel obd.
	27. 8. a. m.	28	27,33	+89	N	150	nix, coel. obd.
	28. meridie		28,22		O	161	coel. obd.
		18		−49			

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff. horae	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmoſphaera
	1. 6. a. m.	18	27,73	−49	S fort.	150	coel. obduct.
Martii	5. 2. p. m.	16	27,78	−66	SW	150	nix, coel. obd.
	6. 6. a. m.		27,12		S. fort.	148	nix, coel. obd.
	24. med. noct.	22	27,23	+67	O fort.	155	nix, coel. obd.
	25. 10. p. m.		27,90		O fort.	164	coel. nubil. deinde nix.
	26. 9. a. m.	36	27,83	+65	NW	165	nix coel. obd.
	27. 9. p. m.		28,48		NW	158	coel. ſeren.
	28. 6. p. m.		28,57		SW	151	coel. ſeren.
April.	17. med. noct.	36	27,76	+46	N fort.	150	coel. nubil.
	19. meridie.		28,22		N	148	coel. ſeren.
Maii	13. med. noct.	4	27,95	−21	SO fort.	133	coel. obd. pluuia.
	14. 4. a. m.	41	27,74	+56	— f. f.	135	— —
	15. 9. p. m.		28,30		malacia	141	coel. ſeren.
	22. 7. a. m.	29	27,70	+43	W	139	pluuia, coel. obd.
	23 meridie.		28,13		W	130	coel. nubil.
Iunii	15. 6. a. m	18	28,24	−14	W	128	coel. obd.
	— med. noct.	24	28,10	−44	W fort.	127	— — pluuia.
	16. med. noct.	15	27,66	+48	— —	135	— — pluuia.
	17. 3. p. m.	18	28,14	−39	NW	135	— — pluuia.
	18. 9. a. m.	21	27,75	+41	N fort.	138	— — pluuia copioſa.
	19. 6. a. m.		28,16		W fort.	137	coel. ſeren.
Iulii	3. meridie	16	27,90	−47	variabil.	122	coel. nubil.
	4. 4. a. m.	20	27,43	+47	SO	127	pluuia.
	4. med. noct.		27,90		W f. f.	131	coel. nubil.
	15. meridie	21	28,04	−41	W	121	coel. obd. pluuia.
	16. 9. a. m.		27,63		W	124	— — —

Menſe

Menſe.	Tempore. die hora.	Diff. horar.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmoſphaera.
Aug.	21. 6. a. m.	54	27,56	+ 57	W	133	coel. obd. pluuia copioſa.
	23. meridie		28,13		variab.	126	coel. nubil.
	29. 3. p. m.	45	27,40	+ 65	W f. f.	129	pluuia copioſa, coel. obd.
	31. meridie		28,05		malacia	127	pluu. cop. coel. nubil. nix.
Octob.	13. 6. p. m.	30	27,39	+ 63	O fort.	146	pluuia copioſa, coel. obd.
	14.med.noct.		28,02		NW	151	coel. ſeren.
	16. 6. p. m.	24	28,22	— 47	W	150	coel. nubil.
	18.med.noct.		27,77		S. f. f.	146	coel. obd.
	19.med.noct.		27,30		— —	143	nix et pluuia.
Nov.	3.med.noct.	24	27,53	+ 53	W fort.	142	pluu. cop. grando, fulgur.
	4.med.noct.		28,06		S	152	coel. ſeren.
	12. 10. p. m.	20	28,60	— 60	NW	155	coel. obd.
	14.med.noct.		28,35		S fort.	153	coel. obd. deinde nix.
	15. 8. p. m.		27,75		S	152	coel. ſeren.
	16. 10. p. m.		27,38		O	156	coel. nubil.
Dec.	18. 10. p. m.	29	28,52	— 60	S	168	coel. ſeren. deinde obd.
	20. 3. a. m.		27,92		SWfort.	159	nix
	20. 3. p. m.	36	28,00	— 70	SW	152	coel. obd. dein. nix cop.
	22. 3. a. m.		27,30		malacia	155	coel. obduct.
	26. 2. a. m.	30	28,03	— 70	NW	184	coel. ſer., deinde nebuloſ.
	26.med.noct.		27,80		S	180	coel.ſer.dein.obd.nix.cop.
	28. 6. a. m.		27,10		N f. f.	155	coel. obd.

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro ſingulis menſibus anni 1781.

Menſe	Altitudo minima.			Altitudo maxima.			Diff. Gr.	Altit. media.	
	Gr.	Die	hora	Gr.	Die	hora		nocte	merid.
Ianuar.	203	6.	VII. a. m.	147	10. 26.	II. p. m.	56	Grad. 165,6	Grad. 157,8
Febr.	206	16.	VII. a. m.	146	26.	II. p. m.	60	178,0	168,0
Martii	183	16.	VII. a. m.	139	31.	II. p. m	44	165.5	156,0
Aprilis	164	24.	VII. a. m.	135	2. 3.	II. p. m	29	154,4	145,0
Maii	155	3.	VII. a. m.	116	19.	II. p. m.	39	143,0	133,3
Iunii.	141	18.	VII. a. m.	113	10.	II. p. m.	28	133,6	124,2
Iulii	138	23. 23. 24. 25.	VI. a. m X. p. m. VI. a. m VI. a. m.	109	12.	II. p. m.	29	131,3	124,1
Auguſti	137	25.	VI. a. m.	115	9.	II. p. m.	22	131,0	123,0
Septem.	147	14.	VI. a. m.	125	20.	II. p. m.	22	139,3	131,4
Octobr.	153	14. 16.	VI. a. m. IX. p. m.	124	5.	II. p. m.	29	146,4	139,5
Nouem.	176	27.	VII. a. m.	136	3.	II. p. m.	40	157,6	152,8
Decem.	187	11. 30.	VIII. a. m. VIII. a. m	152	20. 21.	II. p. m.	35	175,0	169,1
Anno 1782.	206	Menſe Februarii		109	Menſe Iulii.		97	151,6	143,5

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigidiores Gradib.						Dies calidiores Gradib.				
	200	190	180	170	160	150	110	120	130	140	150.
Ianuar.	2	2	4	6	21	30					7.
Februar.	3	8	12	19	24	28					4.
Mart.			1	11	22	29				1	10.
April.					6	22				4	24.
Maii						8		3	11	23	31.
Iunii						0		8	25	30	30.
Iulii						0	1	4	28	31	31.
Auguſt.						0		11	30	31	31.
Septembr.						0			14	27	30.
Octobr.						6			3	12	31.
Nouembr.				4	9	26				2	8.
Decembr.			11	25	27	31					0.
Anno 1782.	5	10	28	65	109	180	1	26	111	161	237.

3. In ſpecie frigoris intenſitas obſeruata fuit intra gradus.

	Dies
200 et 210. die 5. 6 Ian. die 13. 15 et 16 Febr. -	5.
190 et 200. die 11. 12. 14. 17 et 20 Februarii -	5.
180 et 190. die 1. 4 Ian., die 7. 8. 19. 22 Febr., die 16 Martii; die 8 — 15. 25. 26 et 30 Dec. -	18.
170 et 180. die 7. 19 Ian., die 2. 3. 5. 6. 9. 21. 23 Febr. die 9. 10. 12. 13. 15. 17 — 20. 27 Martii, die 26 — 29 Nouembr., die 1 — 7. 16 — 18. 24. 27. 29 et 31 Decembris - - -	37.

160

	Dies.
160 et 170. die 2. 3. 8. 9. 11. 12. 14. — 18. 20. 24. 27. 28. Ian., die 1. 4. 10. 18. 28 Febr., die 8. 11. 14. 21 — 26. 28. 30 Martii, die 23 — 25. 28 — 30 Apr., die 19 — 21. 25. 30 Nou., die 19 et 23 Dec. - - - -	44.

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

	Dies.
110 et 100. die 12 Iulii - - - -	1.
120 et 110. die 17. 19. 21 Maii, die 2. 6. 8 — 12. 14. Iunii, die 10. 11. 14 Iulii, die 2 — 6. 9. 11. 12. 14. 15 et 19 Auguſti - - -	25.
130 et 120. die 12. 13. 16. 18. 20. 23. 25. 31 Maii, die 1. 3. 5. 7. 13. 15. 16. 20 — 26. 28 — 30 Iunii, die 1 — 9. 13. 15 — 22. 26 — 31 Iulii, die 1. 7. 8. 10. 13. 16 — 18. 20. 22 — 31 Aug. die 3. 4. 6 — 11. 18. 20. 24. 26 — 28 Sept., die 1. 4 et 5 Octobris - - -	85.
140 et 130. die 1 Martii, die 2 — 5 Apr., die 9. 10. 11. 14. 15. 22. 24. 26 — 30 Maii, die 4. 17 — 19. 27 Iunii, die 23. 25 Iulii, die 21 Aug., die 1. 2. 5. 12. 15. 17. 19. 21 — 23. 25. 29. 30 Sept. die 2. 3. 6. 7. 17. 18. 20. 23. 28 Octobr., die 2 et 3 Nouembr. - - - -	50.

Patet ex tabula 1ª per totum annum fuiſſe.

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 206, die 16ª menſis Februarii, horra matutina 7ª. Barom. 28. 51, coelum nebuloſum, malacia.

2. Al-

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 109. die 12^{a} menſis Iulii, hora poſtmeridiana 2^{a}. Barom. 28.08, coelum nubiloſum, Eurus; at hora 5ta ſubſequebatur tempeſtas vehemens ex occidente, pluuia comitata copioſa.

3. Vnde variatio maxima 97 graduum, ſecundum ſcalam Delislianam.

4. Frigus medium, ſiue altitudinem Thermometri mediam inter omnes quae mane et veſpere obſeruatae fuerunt, 151$\frac{1}{5}$ grad. Calorem autem medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam ex meridianis erutam, 143$\frac{1}{4}$ grad. Si vero menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ianuar. —— April. Nouembr. et Decembr. ſegregamus, inueniemus in illis calorem medium, 129$\frac{1}{4}$, in his vero frigus medium 166 graduum fuiſſe.

5. Ex tabula 2da intelligitur, hoc anno 180 dies fuiſſe frigidiores gradu 150, vel termino congelationis aquae naturalis; inter quos 109 numerauimus, quibus frigus 160 gradum ſuperauit: fuerunt porro iſtic 65 dies frigidiores gradu 170, deinde 28 dies frigidiores gradu 180, et 10 dies frigidiores gradu 190; 5 denique dies quibus intenſitas frigoris 200 gradum excedebat.

6. Docet denique eadem 2da Tabula, hoc anno reſpectu caloris, 237 dies fuiſſe quibus mercurius Thermometri ſupra terminum congelationis naturalis aſcendebat, inter quos annotati fuerunt 161 calidiores gradu 140, 111 vero dies calidiores gradu 130, 26 calidiores gradu 120, et vnicus dies quo intenſitas aeſtus gradum ſuperabat 110.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia dies	Vent. lenis dies	Vent. fortis dies	Procella. dies	Nord dies	N-O dies	Oſt dies	S-O dies	Sud dies	S-W dies	Weſt dies	N-W dies
Ianuar	2	15	9	5	3	1	2	2	9	6	5	3
Febr.	9	18	1	0	9	2	3	1	3	2	4	4
Mart.	6	12	12	1	3	4	6	1	4	4	4	5
April.	2	23	5	0	7	5	7	6	1	0	1	3
Maii	3	16	9	3	1	0	2	5	4	2	8	9
Iunii	5	10	14	1	4	1	6	2	1	1	11	4
Iulii	6	14	10	1	2	1	5	2	1	5	10	5
Aug.	11	13	5	2	1	2	5	3	4	3	12	1
Sept.	12	11	6	1	1	3	4	1	6	4	6	5
Oct.	2	16	11	2	1	1	4	1	8	3	11	2
Nou.	11	14	4	1	1	0	11	7	8	1	1	1
Dec.	13	15	2	1	4	0	3	3	13	4	0	4
Anno 1781.	82	177	88	18	37	20	58	34	62	35	73	46

Intelligitur hinc, hoc anno imprimis Zephirum imperaſſe, tum vero Auſtrum, et Eurum quoad frequentiam tertium locum tenuiſſe. Malaciae praecipue obſeruatae fuerunt menſibus Decembris, Septembris, Auguſti et Novembris: procellae vero et venti vehementiores maxime obuenere menſibus Ianuarii, Iunii et Octobris.

Speciatim autem procellae eruperunt e regione.

Nord, die 11 Ian. et die 28 Decembris - - 2 dies
Oſt, die 11 Martii - - - - 1 ——
Sud, die 10 Ian. die 13, 19 Maii et die 1. 19 Oct. 5 ——
SW, die 8 Ian. die 14 Maii, die 12 Iun. et die 2 Sept. 4 ——
Weſt. die 4 Iulii, die 29, 30 Aug., et die 4 Nou. - 4 ——
NW, die 2, et 25 Ian. - - - - 2 ——

IV. At-

IV. Atmoſphera.

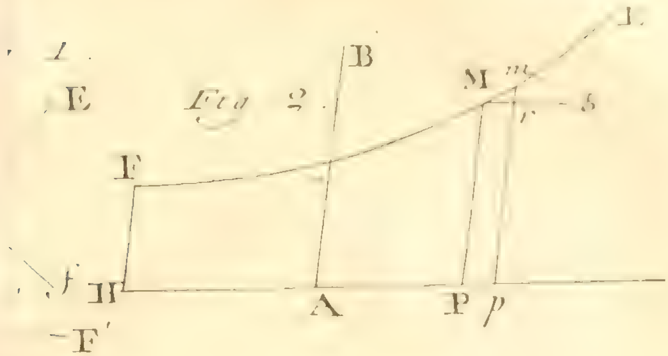
Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	4.	19.	3.	3.	14.	0, 66.
Februar.	9.	9.	9.	2.	10.	0, 46.
Martii	9.	13.	5.	1.	10.	0, 36.
Aprilis	15.	4.	2.	7.	5.	1, 24.
Maii	7.	6.	3.	14.	2.	1, 69.
Iunii	12.	6.	1.	12.		2, 11.
Iulii	7.	6.	0.	20.		3, 49.
Auguſti	4.	7.	3.	24.		3, 92.
Septemb.	7.	6.	4.	16.	2.	2, 22.
Octobr.	7.	13.	2.	14.	3.	2, 48.
Nouemb.	5.	16.	10.	6.	8.	0, 57.
Decemb.	6.	11.	12.	0.	10.	0, 70.
Anno 1782.	92.	116.	54.	119.	64.	19, 90.

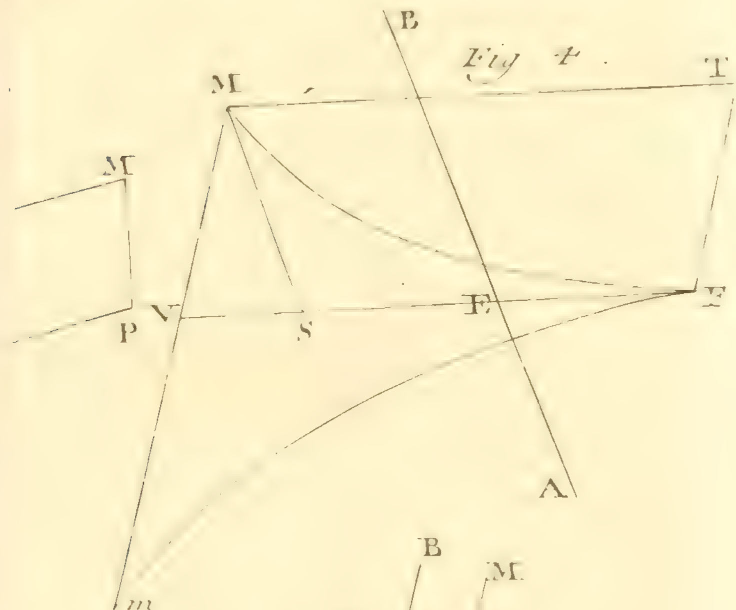
V. Reliqua Phaenomena.

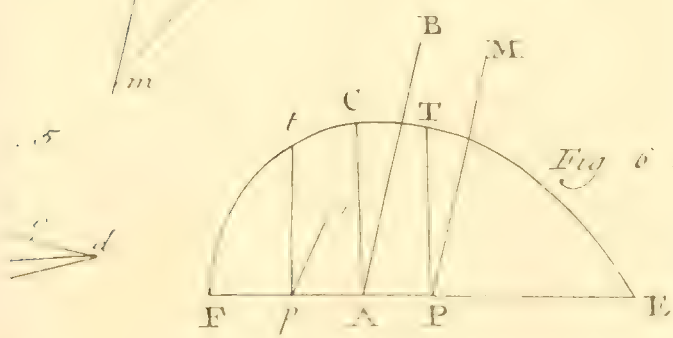
Grando cecidit diebus 4; ſcilicet die 25 Iunii, die 5 Iulii, die 14 et 22 Sept. Aurorae boreales apparuerunt 29; et quidem 16 lucidae, die 10 Ian. die 17. 30 Martii, die 6. 7 Aprilis, die 4. 5 Maii, die 4. 22 Aug., die 3. 12. 22. 30 Sept., die 8, 11 Octobris et die 26 Nou. Reliquae 13 debiliores obſeruatae fuerunt, die 3, 18 Febr. die 19, 29 Martii, die 17 Maii, die 2. 6. 10. 13 Sept., die 1. 5. 14 Oct. et die 20 Nou.

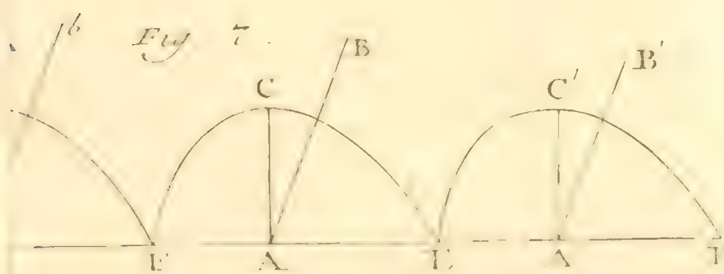
Tonuit 11^{es}, e longinquo die 17. 28 Maii, die 25 Iunii, die 7 Iulii et die 3 Nouembris; et vicine die 16 Maii, die 12 Iunii, die 12, 18 Iulii, die 28 et 31 Auguſti.

Flumen Neua a glacie liberabatur die 18 Aprilis, poſtquam per 131 tantum dies glacie obductum perſtitit. Tum vero poſt 211 dies, menſe ſcilicet Nouembris die 25, glacie iterum obducebatur.


Fig 2.
B
M
m
L
s
r
E
F
H
A
P
p
F'


Fig 4.
B
M
T
M
V
P
S
E
F
A
m


B
M
C
T
t
Fig 6.
F
p
A
P
E


Fig 7.
b
B
C
C'
B'
E
A
E
A
E

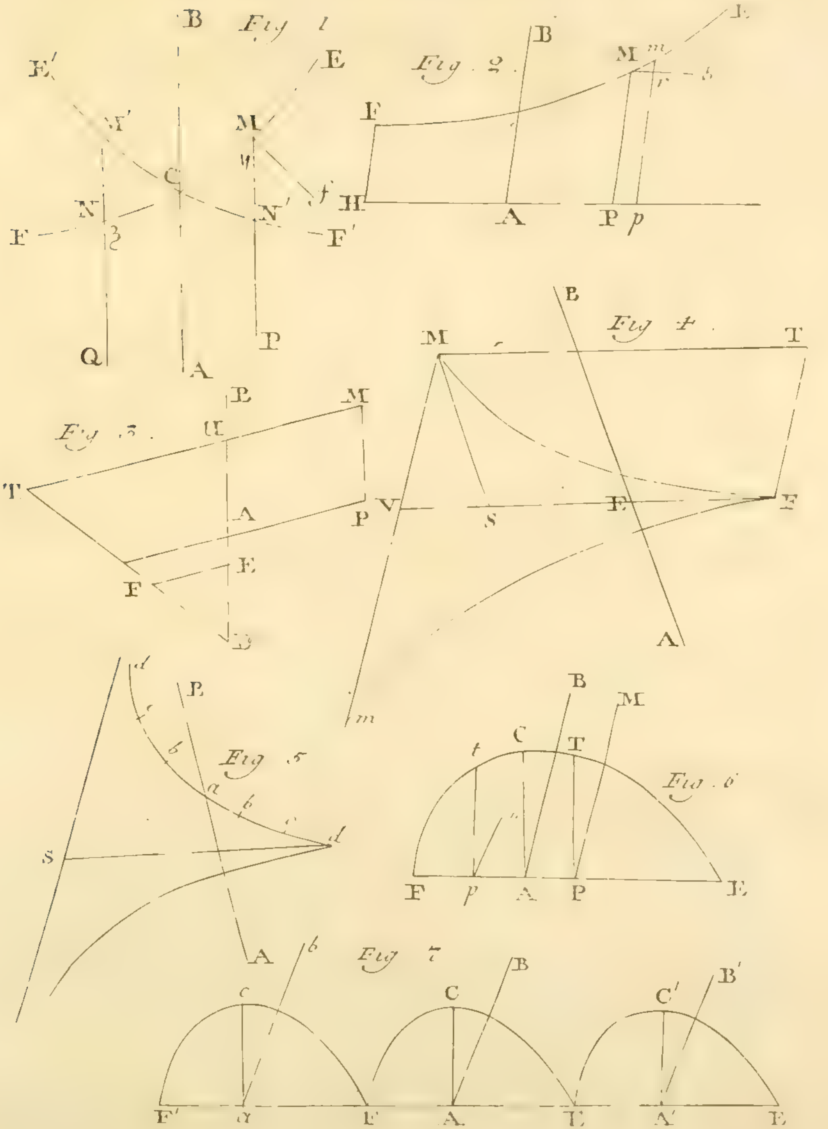
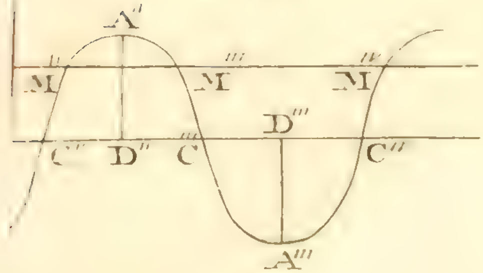

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7

Fig. 2.



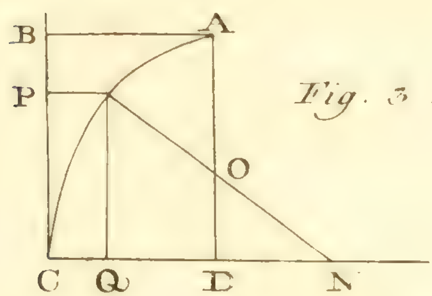


Fig. 3.

Fig. 4.

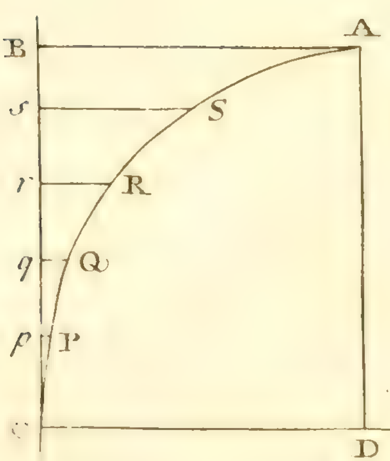
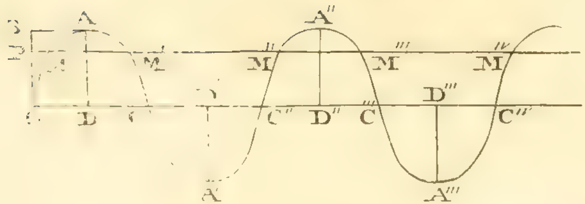


Fig. 5.

Fig. 2.



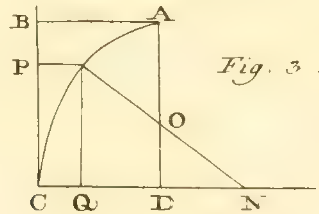
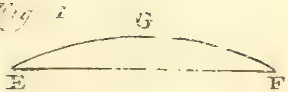


Fig. 3.

Fig. 1.



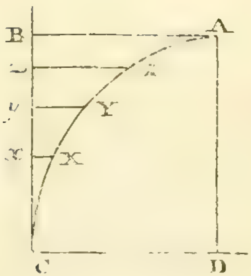


Fig. 4.

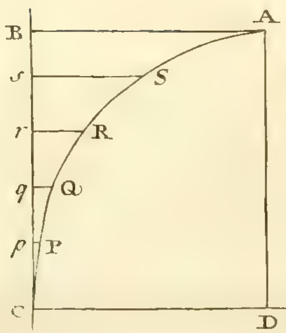


Fig. 5.

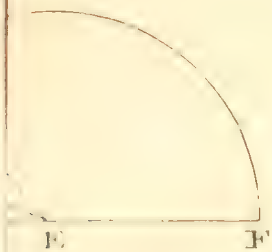
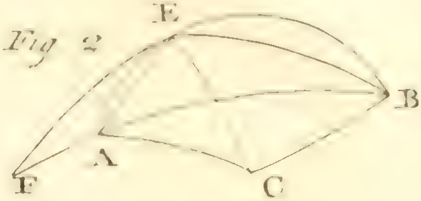


Fig 2



3.

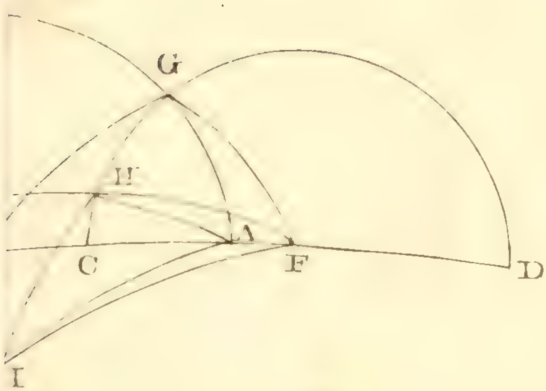


Fig. 4.

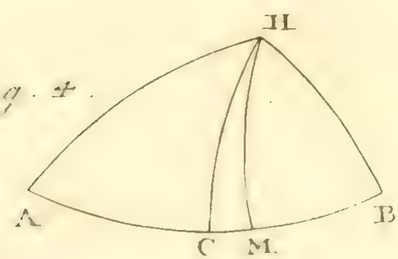




Fig. 1

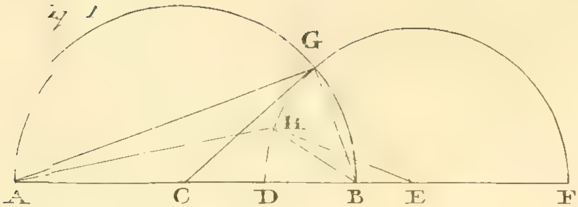


Fig. 2

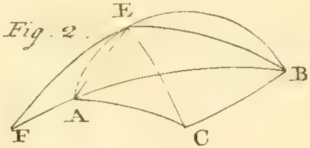


Fig. 3

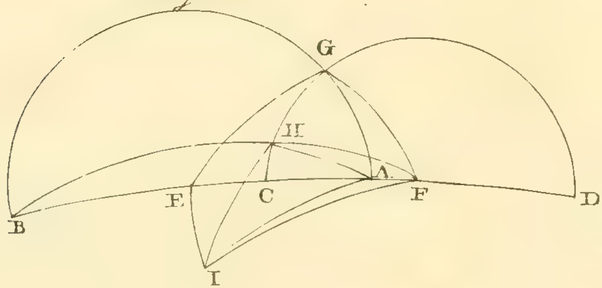


Fig. 5

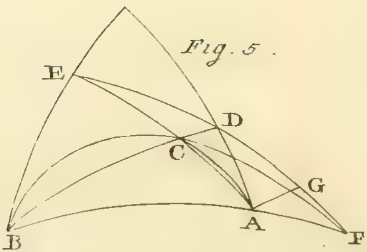
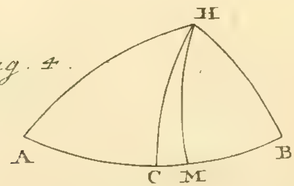


Fig. 4



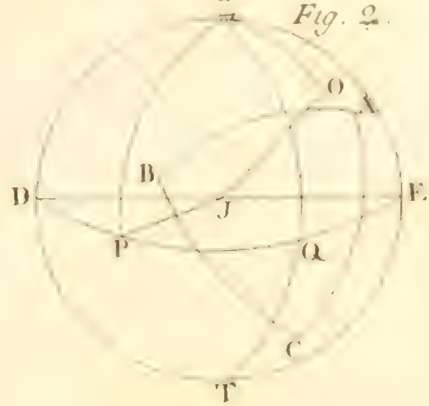
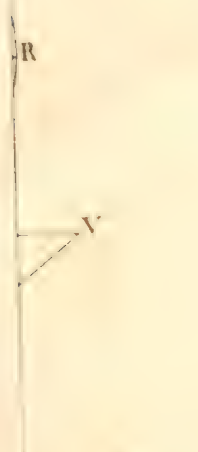


Fig. 2.



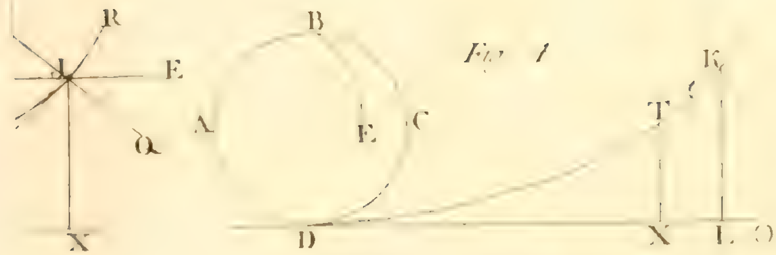


Fig. 1

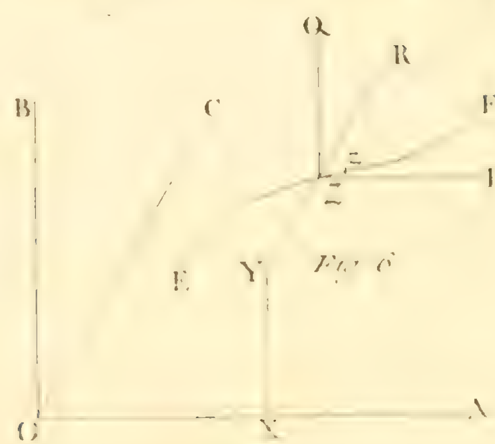


Fig. 6



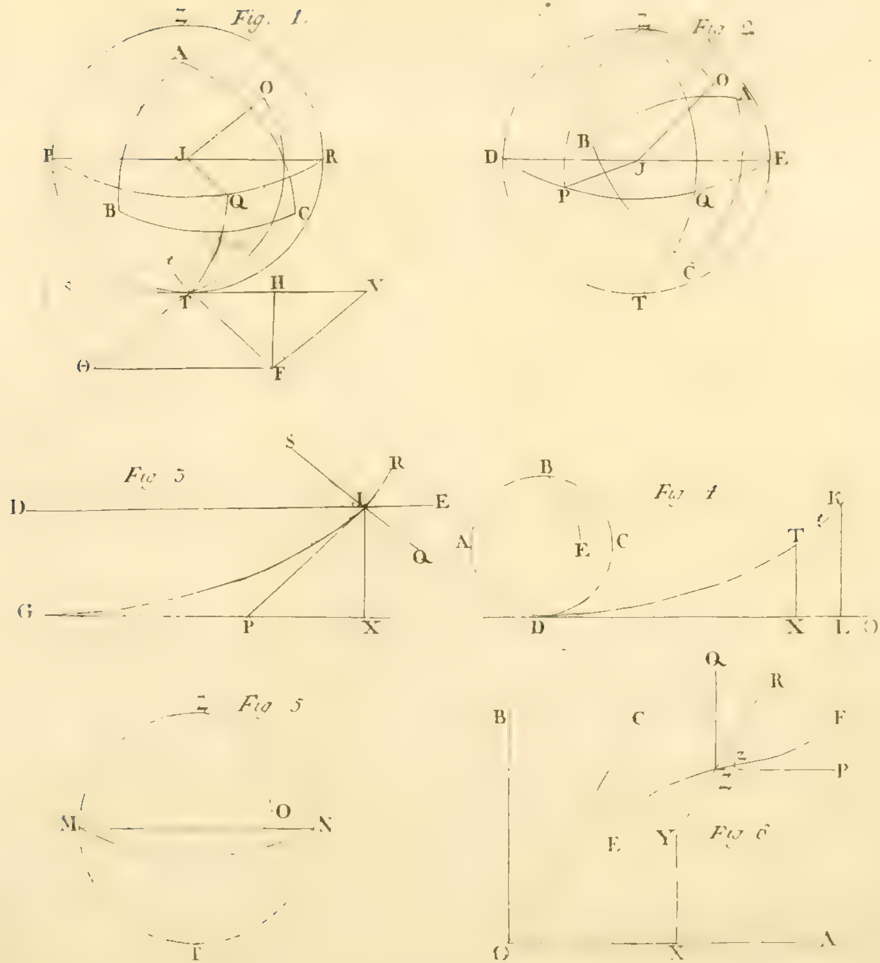

Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

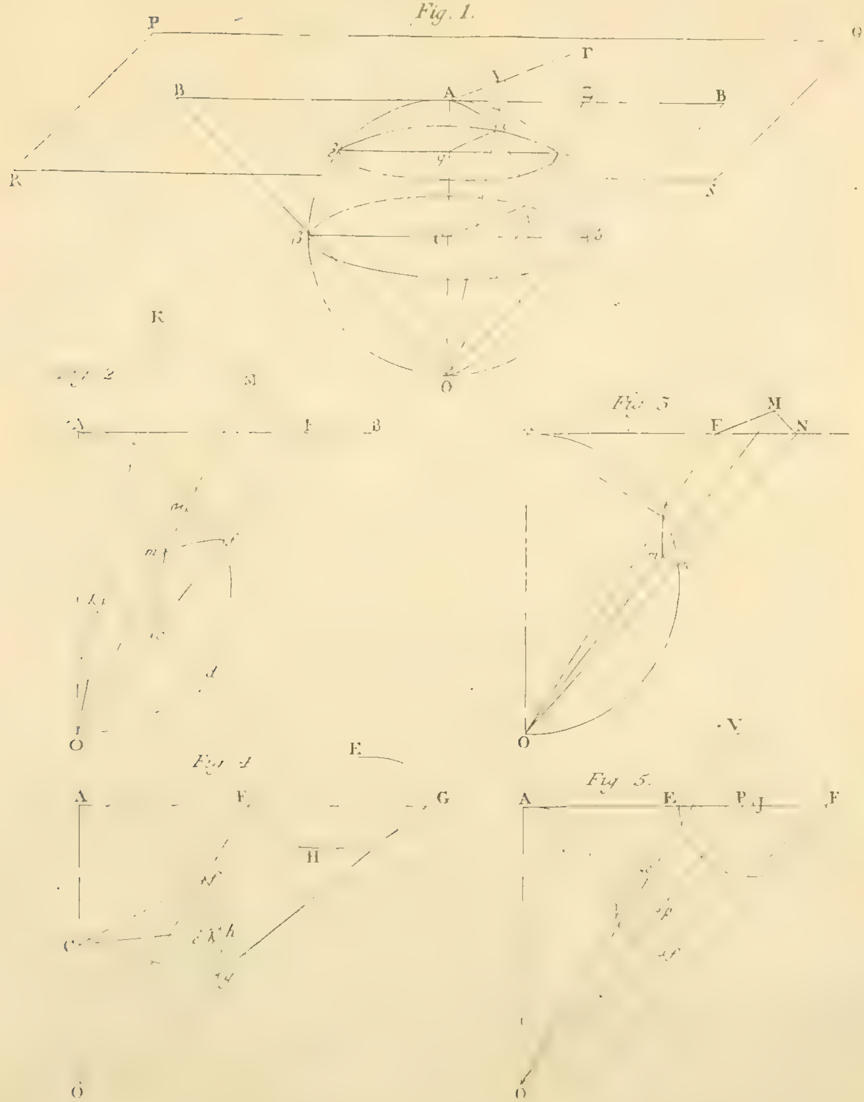

Fig. 1.
P
Q
Γ
B
A
B
R
O
K
M
Fig. 3
E
M
N
A
B
O
Fig. 4
E
A
F
G
H
O
Fig. 5.
A
E
P
F
O

Fig. 2.

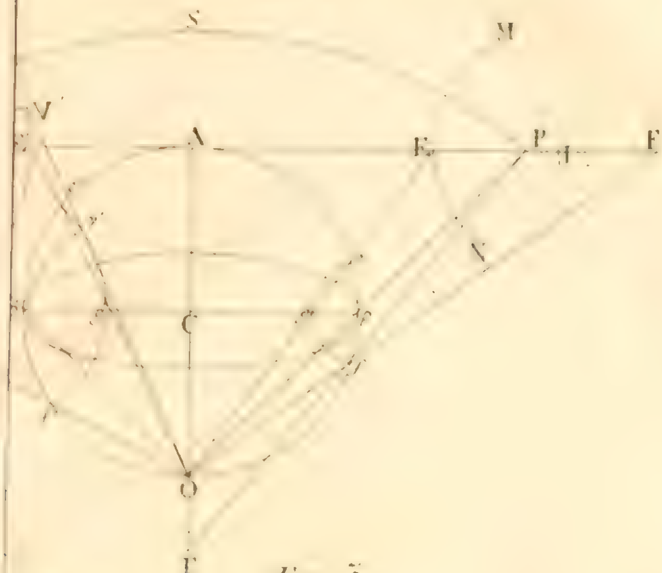


Fig. 3.

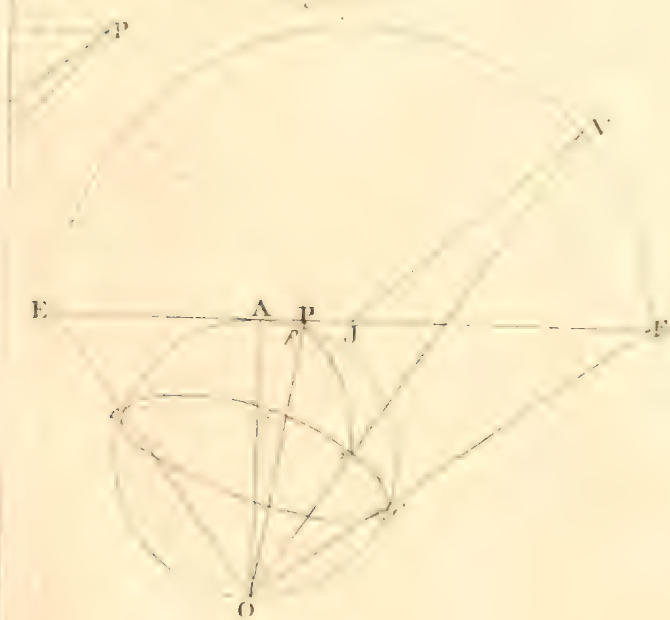


Fig. 2

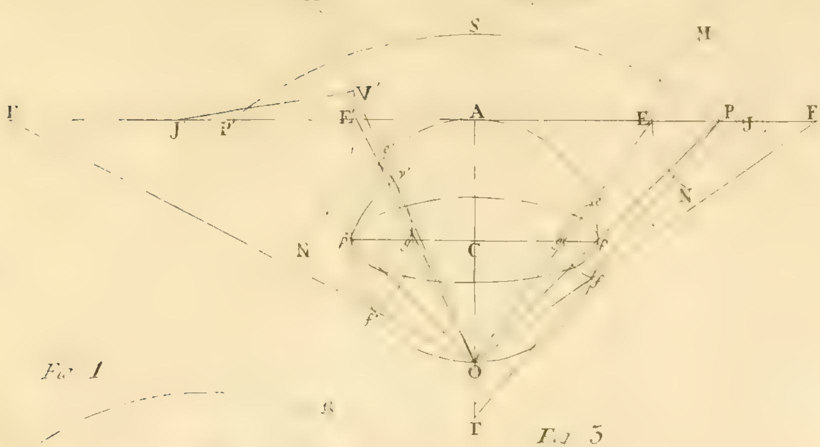


Fig. 1



Fig. 3

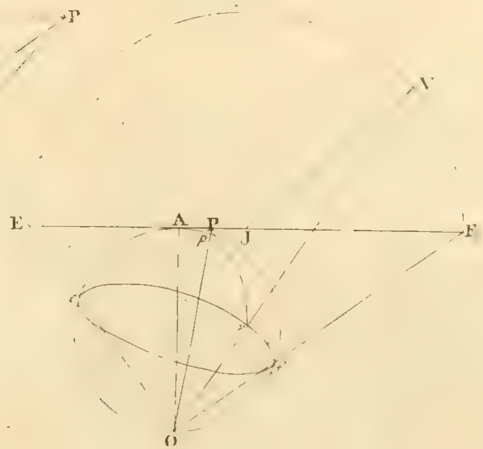
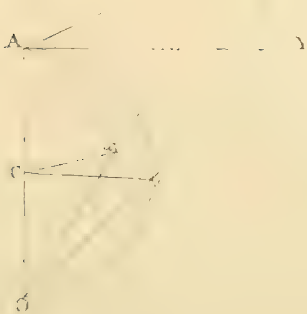


Fig. 4





-vipara

Fig. 1



Caenopteris furcata

Fig. 2



Caenopteris [illegible]

Fig. 3



Caenopteris vi—vipara

100125037